

# ÖLÇÜM BELİRSİZLİĞİ

Enver SADIKHOV  
Rıfat KANGİ  
Sevilay UĞUR

ULUSAL METROLOJİ ENSTİTÜSÜ

UME 95-014

Kasım 1995

Gebze-KOCAELİ



## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	5
1. GİRİŞ .....	6
2. METROLOJİ DÜNYASINDA BELİRSİZLİK HESAPLARININ TARİHÇESİ .....	7
3. TANIMLAR .....	9
4. HATA ANALİZİNDE KULLANILAN TERİMLER .....	15
5. BELİRSİZLİK HESAPLARINDA İSTATİSTİKSEL KAVRAMLAR .....	18
5.1. RASGELE HATALAR .....	18
5.2. SİSTEMATİK HATALAR .....	18
5.3. İSTATİSTİK İLİŞKİLER .....	20
5.3.1. VERİLEN NOKTADA GERÇEK DEĞER .....	20
5.3.2. GÜVENİLİRLİK ARALIĞI .....	21
5.3.3. ÇOK SAYIDA YAPILMIŞ ÖLÇÜM SERİLERİ .....	21
5.3.4. TEK SERİLİ AZ SAYIDA YAPILMIŞ ÖLÇÜM .....	22
5.3.5. STUDENT'S İSTATİSTİĞİ .....	23
5.3.6. AZ SAYIDA N ÖLÇÜMÜN BİRKAÇ KEZ TEKRARI .....	25
5.4. ÖLÇÜLEN BÜYÜKLÜĞÜN TOPLAM BELİRSİZLİĞİ .....	34
5.5. ÖLÇÜM HATALARININ SONUCA TAŞINMASI .....	36
6. STANDART BELİRSİZLİĞİN HESAPLANMASI .....	41
6.1. ÖLÇÜMÜN MODELLENMESİ .....	41
6.2. STANDART BELİRSİZLİĞİN A-TİPİ HESAPLANMASI .....	42
6.3. STANDART BELİRSİZLİĞİN B-TİPİ HESAPLANMASI .....	43
7. BİLEŞİK BELİRSİZLİĞİN HESAPLANMASI .....	45

7.1. BİRBİRLERİNDEN BAĞIMSIZ GİRDİ BÜYÜKLÜKLERİ .....	45
7.2. BİRBİRLERİNE BAĞIMLI GİRDİ BÜYÜKLÜKLERİ .....	48
8. GENİŞLETİLMİŞ BELİRSİZLİĞİN BELİRLENMESİ .....	51
9. SONUÇLARIN RAPORLANMASI .....	52
10. ÖLÇÜM BELİRSİZLİĞİNİN TAYİNİNDE İZLENECEK YOLLAR .....	53
11. UYGULAMA ÖRNEKLERİ .....	55
12. KAYNAKLAR .....	63

## ÖNSÖZ

Ölçüm sonuçlarının doğru değerlendirilmesi sonuçların güvenilirliğine bağlıdır. Ölçülen aynı büyüklüğün değeri ölçümden ölçüme farklılık gösterir. Her ölçümün sonucunda, verilen sayı mutlaka belli bir şüphe içerir. O yüzden ölçüm sonucu verilirken ölçülen veya hesaplanan değer belirsizliği her zaman belirlenmelidir. Diğer bir deyişle, ölçülen büyüklüğün gerçek değerinin belli bir olasılıkla bulunduğu aralık verilmelidir.

Belirsizlik hesaplarının matematiğinin pek çok dalıyla yakından ilişkisi vardır. Bu nedenle doğal olarak bir çalışmada bütün alanları kapsamak mümkün değildir. Ancak okurlara belirsizlik ve belirsizlik hesaplarıyla ilişkin genel bilgiler vermek açısından bu kitabın faydalı olacağını diliyoruz ve umut ediyoruz.

UME tarafından hazırlanan bu döküman kalibrasyon yapan laboratuvarlarda ölçüm belirsizliklerinin ifadesinde izlenecek yöntemleri belirleyerek, ISO/TAG4/WG3 çalışma grubunun amaçları doğrultusunda Türkiye’de, belirsizlik ifadelerinin elde edilebilmesi için gereken bilgiyi oluşturup, iletip dağıtmak ve ölçüm sonuçlarının ulusal ve uluslararası karşılaştırmalarına temel oluşturmak düşüncesiyle hazırlanmıştır.

Bu çalışmada, laboratuvarlarıyla ilgili bilgileri bizlere ulaştırarak, deneyimlerini bize aktararak, UME’nin ve endüstrinin bu konudaki gereksiniminin belirlenmesinde yardımcı olan arkadaşlarımıza katkılarından dolayı teşekkür ederiz.

## 1. GİRİŞ

Üretimde kullanılan cihazların gerektiği şekilde kullanılabilmesi, cihaz kalitesinin saklanabilmesi, cihazların kontrolü ve proses kontrolü için ölçümlerin yapılması şarttır. Verimli bir üretimde makinaların gerektiği şekilde kullanılması ve bakımı ön koşuldur. Ölçümler olmadan otomasyon mümkün değildir.

Bir ölçümün sonucu rapor edilirken, sonucun kalitesini belirten sayısal bir gösterge olmalıdır ki bu sonucu kullanan kişiler o sonucun güvenilirliğini tayin edebilsinler. Böyle bir gösterge olmaksızın ölçüm sonuçları kendi aralarında, sertifikalarda veya standartlarda verilen değerlerle karşılaştırılmaz. Bu nedenle bir ölçümün kalitesini karakterize eden, hemen uygulanabilir, kolayca anlaşılabilir ve genel olarak kabul gören bir işlemin olması çok önemlidir. Bu da ölçüm sonucunda elde edilen değer belirsizliğini hesaplamak ve ifade etmektir.

Ölçümlerdeki hatalar ve hataların analizi ölçüm bilimi veya metrolojide sonuçların değerlendirilmesinde uzun süredir kullanılmaktadır [1,2]. Bununla beraber ölçüm sonuçlarının dağılımının tanımlanması için belirsizlik hesapları göreceli olarak yeni bir kavramdır. Günümüzde, hatanın kesin olarak bilinen ve bütün şüphelenilen bileşenleri hesaplanıp ve gereken bütün düzeltmeler yapıldıktan sonra bile, hala verilen sonucun doğruluğu konusunda belirsizliğin olduğu yaygın bir şekilde kabul edilir. Bu belirsizlik verilen sonucun ölçülen niceliği ne kadar temsil ettiği konusundaki şüphedir.

SI birimlerinin kullanılmasının bilim ve teknolojiye yaptığı katkılar gibi, ölçümlerdeki belirsizliğin nasıl ifade edileceği üzerindeki dünyada varılan görüş birliği de bilimde, mühendislikte, ticaret ve endüstride yapılan ölçüm ve düzenlemelerin hemen anlaşılmasına ve doğru yorumlanmasına katkıda bulunacaktır. Gün geçtikçe küreselleşen dünyamızda belirsizliğin hesaplanması ve ifade edilmesinde kullanılan yöntemin bütün dünyada aynı olmasının, farklı ülkelerde yapılan ölçümlerin hemen karşılaştırılabilmesi açısından önemi yadsınamaz.

Bir ölçüm sonucunun belirsizliğinin hesaplanması ve ifade edilmesi için ideal bir yöntem şu özellikleri taşımalıdır.

**Evrensellik:** Yöntem her çeşit ölçüme ve her ölçüm için kullanılan her çeşit veriye uygulanabilir olmalıdır.

Belirsizliğin ifadesinde kullanılan gerçek nicelik de aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır.

**Kendi içinde tutarlılık:** Ölçüm belirsizliği, belirsizliğe katkıda bulunan bileşenlerden, bileşenlerin gruplanmış şekliyle veya alt bileşenlerine ayrılmış olmasından bağımsız olarak, elde edilebilmelidir.

**Taşınabilirlik:** Bir ölçümün sonucunu ikinci bir ölçümde kullanmak gerektiğinde birinci ölçümün belirsizliği doğrudan bu ikinci ölçümde kullanılabilir.

Bu kitabın yazımında CIPM'in Recommendation 1 (CI-1981) ve INC-1 (1980) dökümanlarının doğrultusunda hazırlanmış olan, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" dan büyük ölçüde faydalanılmıştır.

## 2. METROLOJİ DÜNYASINDA BELİRSİZLİK HESAPLARININ TARİHÇESİ

Ölçümlerdeki belirsizliğin nasıl ifade edileceği konusunda uluslararası bir ortak uygulamanın olmadığını gören, metroloji dalında dünyanın en yüksek otoritesi olan Comité International des Poids et Mesures (CIPM) 1978 yılında bu sorunun çözümü için Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)'den bu konuya ulusal laboratuvarlarla birlikte eğilmesini ve bir öneri getirmesini istemiştir.

32 ulusal laboratuvar ve 5 uluslararası organizasyona gönderilen anketler sonucunda herkes ölçüm belirsizliğinin saptanmasında uluslararası kabul gören bir işlemin seçiminin ve farklı belirsizlik bileşenlerinin bir araya getirilerek sonuçta tek bir belirsizlik değerine ulaşmanın önemini vurgulamış fakat bunun nasıl yapılacağı konusunda değişik öneriler getirmişlerdir.

Bunun üzerine BIPM, her yerde aynı şekilde uygulanacak ve her yerde genel olarak kabul göreceği bir işlemin saptanması için bir toplantı düzenlemiştir. 11 ulusal laboratuvardan katılımın olduğu bu çalışma grubu INC-1(1980) Expression of Experimental Uncertainties dökümanını oluşturmuş ve bu döküman CIPM tarafından önce 1981'de sonra da 1986'da yeniden onaylanmıştır.

Buna göre INC-1 tarafından deneysel belirsizliğin ifadesiyle ilgili olarak yapılan öneriler şöyledir:

1. Ölçüm sonuçlarının içerdiği belirsizlik, genellikle pek çok belirsizlik bileşeninden oluşur. Bu bileşenler iki grupta toplanır.
  - A. İstatistiksel yöntemler kullanılarak değerlendirilebilenler,
  - B. Diğer yöntemler kullanılarak değerlendirilebilenler

A ve B yöntemleriyle değerlendirilen belirsizlikler arasında her zaman basit bir benzetme bulunmayabilir.

Belirsizliğin detaylı bir şekilde değerlendirildiği herhangi bir raporda belirsizliği oluşturan bütün bileşenler, ve herbir bileşenin hangi yöntemle değerlendirildiği açık bir şekilde yer almalıdır.

2. A grubundaki belirsizlik bileşenleri, tahmin edilen varyans  $S_i^2$ (veya tahmin edilen standart sapma  $s_i$ ) ve serbestlik derecesi  $\nu_i$  olarak karakterize edilir.
3. B grubundaki belirsizlik bileşenleri, varlığı kabul edilen ilgili varyanslara yaklaşımlar olarak kabul edilebilecek  $u_i^2$  ile gösterilen niceliklerle karakterize edilir. Nicelik  $u_i^2$  varyans,  $u_i$  ise standart sapma gibi ele alınabilir.
4. Toplam belirsizlik, varyansların birleştirilmesinde kullanılan belli yöntemler kullanılarak, elde edilen rakamsal değerdir. Toplam belirsizlik ve onun bileşenleri, standart sapmalar olarak ifade edilebilmelidir.
5. Eğer belli bir uygulama için, sonuçta ulaşılan belirsizlik, toplam belirsizliğin belli bir faktörle çarpımıyla elde ediliyorsa bu çarpım faktörü her zaman açık bir şekilde belirtilmelidir.

Endüstrinin ve ticaretin geniş gereksinimlerini daha iyi bildiği için Uluslararası Standartizasyon Kurumu (ISO)'dan, çalışma grubunun önerileri ışığında ayrıntılı bir rehberin hazırlanması CIPM tarafından istenmiş

ve bu işin sorumluluğu ISO Technical Advisory Group on Metrology (TAG 4)'e verilmiştir.

TAG 4 tarafından BIPM, IEC (International Electrotechnical Commission), ISO ve OIML (International Organization of Legal Metrology)'den gelen uzmanlardan TAG 4 başkanlığında çalışma grubu (ISO/TAG4/WG 3) aşağıdaki iki amacı gerçekleştirmek için kurulmuştur.

Belirsizlik ifadelerinin elde edilebilmesi için gereken bütün bilgiyi oluşturup, iletip dağıtmak.  
Ölçüm sonuçlarının uluslararası karşılaştırmalarına temel oluşturmak.

Bütün bu çalışmaların sonucunda 1993 yılında hazırlanmış olan "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" [3] dökümanı dünyadaki metroloji merkezlerince kullanılmaktadır. NIST (ABD), NPL (İngiltere) [4,5] gibi kurumlarda bu dökümanın özetlenmiş hali bir kılavuz olarak kullanılmaktadır. Döküman, geniş kapsamlı olup, yapılan ölçüm ve kalibrasyonlarda elde edilen sonuçların içerdiği belirsizliği hesaplayabilmek için genel bir yön belirlemektedir.

### 3. TANIMLAR

Belirsizlik hesaplarının nasıl yapıldığı ve nasıl ifade edildiğine geçmeden önce bazı tanımların [3,6] açıklığına kavuşturulmasında yarar vardır. Bu bölüm okuyucuya bu konuda yardımcı olmak amacıyla hazırlanmıştır.

**Ölçülebilir büyüklük (Measurable quantity)** Bir olayın, bir cismin veya bir maddenin nicel olarak belirlenen özelliği.

- Notlar: 1) "Büyüklik" terimi, genel anlamda bir büyüklüğe karşılık olabileceği gibi, özel bir büyüklüğe de karşılık gelebilir.  
2) Birbirleriyle karşılaştırılabilen büyüklükler, büyüklük kategorilerinde biraraya getirilebilir, örneğin:  
- İş, ısı, enerji;  
- Kalınlık, daire çevresi, dalga boyu.  
3) Büyüklük sembolleri ISO 31'de verilmiştir.

**Bir büyüklüğün değeri (Value of a quantity)** Bir büyüklüğün, bir rakam ve uygun bir ölçüm birimiyle ifadesi.

**Bir büyüklüğün gerçek değeri (True value of a quantity)** Tanımlanmış bir büyüklüğü ele alındığı koşullarda eksiksiz ve ideal olarak belirleyen değer.

Not: Bir büyüklüğün gerçek değeri ideal bir kavramdır ve çoğu zaman tam olarak bilinemez. Gerçekte ise quantum etkileri tek bir gerçek değer var olmasını olanaksızlaştırır.

**Bir büyüklüğün konvansiyonel gerçek değeri (Conventional true value of a quantity)** Belirli bir amaç için, bir büyüklüğün gerçek değerinin yerini alabilen büyüklüğün değeri.

Not: Konvansiyonel gerçek değer, genellikle, gerçek değerdir; Belirlenen amaç için gerçek değerle aralarında önemsiz bir fark olacak kadar yakın bir değer alınır.

**Ölçüm (Measurement)** Bir büyüklüğün değerinin bulunmasına yönelik işlemler dizisi.

**Ölçüm prensibi (Principle of measurement)** Ölçüm metodunun bilimsel temeli.

**Ölçüm metodu (Method of measurement)** Genel hatlarıyla ifade edilen ve belirli bir prensibe göre gerçekleştirilen ölçüm faaliyetleriyle ilgili teorik ve uygulamalı işlemler dizisi.

**Ölçüm prosedürü (Measurement procedure)** Detaylı bir şekilde ifade edilen ve belirli bir metoda göre gerçekleştirilen ölçüm faaliyetleriyle ilgili teorik ve uygulamalı işlemler dizisi.

**Ölçülen büyüklük (Measurand)** Ölçüme tabi olan büyüklük.

Not: Uygun olduğu takdirde, ölçüm büyüklüğü veya ölçülecek büyüklük ifadeleri de kullanılabilir.

**Etki büyüklüğü (Influence quantity)** Ölçümü yapılmayan, ancak ölçüm cihazının gösterge değerini veya ölçülen büyüklüğün değerini etkileyen büyüklük.

**Ölçüm sonucu (Result of a measurement)** Ölçülen büyüklüğün ölçüm sonucunda elde edilen değeri.

Notlar: 1) "Ölçüm sonucu" terimi kullanıldığında aşağıdakilerden hangisine karşılık geldiği açıkça belirtilmelidir;

- Gösterge (değeri),
- Düzeltilmemiş sonuç,
- Düzeltilmiş sonuç,

ve ayrıca birkaç gözlem üzerinden ortalama içerip içermediği de belirtilmelidir.

2) Ölçüm sonucunun eksiksiz ifadesinde, ölçüm belirsizliği ve gerekli etki büyüklüğü değerleri hakkında bilgiler yer alır.

**Ölçüm hatası (Error of a measurement)** Ölçüm sonucundan, ölçülen büyüklüğün (konvansiyonel) gerçek değerinin çıkarılmasıyla elde edilen sonuç.

Notlar: 1) Bu terim aşağıdaki terimlere aynen uygulanır;

- gösterge (değeri),
- düzeltilmemiş sonuç,
- düzeltilmiş sonuç.

2) Ölçüm hatasının bilinen kısımları, uygun düzeltmeler yapılarak telafi edilebilir. Düzeltilmiş sonuca ait hata ancak belirsizlik ile karakterize edilebilir.

3) Matematiksel işarete (+/-) sahip "mutlak hata", hata modülü olan hatanın mutlak değeri ile karıştırılmamalıdır.

**Bağlı hata (Relative error)** Mutlak ölçüm hatasının ölçülen büyüklüğün (konvansiyonel) gerçek değerine oranı.

**Rasgele hata (Random error)** Aynı büyüklüğün bir dizi ölçümleri esnasında önceden tahmin edilemeyecek şekilde değişen ölçüm hatası bileşeni.

Not: Rasgele hata için düzeltme yapmak mümkün değildir.

**Sistemik hata (Systematic error)** Aynı büyüklüğün bir dizi ölçümleri boyunca sabit kalan veya önceden tahmin edilebilen değişimler gösteren ölçüm hatası bileşeni.

**Düzeltilme (Correction)** Ölçüme ait düzeltilmemiş sonuca cebirsel olarak ilave edilen ve öngörülen sistemik hatayı telafi eden değer.

Notlar: 1) Düzeltilme, öngörülen sistemik hataya eşittir, ancak matematiksel olarak ters işarete (+/-) sahiptir.  
2) Sistemik hata tam olarak bilinemeceğinden düzeltilme bir belirsizliğe sahiptir.

**Düzeltilme faktörü (Correction factor)** Öngörülen sistemik hatayı telafi etmek amacıyla, ölçüme ait düzeltilmemiş sonuç ile çarpılan sayısal faktör.

Not: Sistemik hata tam olarak bilinemeceğinden düzeltilme faktörü bir belirsizliğe sahiptir.

**Düzeltilmemiş sonuç (Uncorrected result)** Bir ölçümün, öngörülen sistemik hatalar için düzeltme yapılmadan önceki sonucu.

Not: Eğer sadece tek bir gösterge değeri varsa, düzeltilmemiş sonuç gösterge değerine eşittir.

**Düzeltilmiş sonuç (Corrected result)** Öngörülen sistemik hataları gözönüne alarak düzeltilmemiş sonuçta yapılan düzeltmeler neticesinde elde edilen ölçüm sonucu.

**Ölçümün doğruluğu (Accuracy of a measurement)** Ölçülen büyüklüğün (konvansiyonel) gerçek değeri ile ölçüm sonucu arasındaki uyuşma yakınlığıdır. Bir ölçümün doğruluğu niteleyici bir kavramdır. Bu yüzden

rakamsal olarak ifade edilmemeli, rakamlar ölçümün belirsizliği için verilmelidir.

Not: Doğruluk yerine kesinlik teriminin kullanımından kaçınılmalıdır.

**Ölçüm sonuçlarının tekrarlanabilirliği (Repeatability of results of measurements)** Aşağıdaki koşulların tümüne uyarak, aynı ölçülen büyüklüğe ait ardıl ölçüm sonuçları arasındaki uyuma yakınlığıdır.

- aynı ölçüm metodu,
- aynı gözlemci,
- aynı ölçme cihazı,
- aynı konum,
- aynı kullanım koşulları,
- kısa zaman aralığında tekrar.

Not: Tekrarlanabilirlik, sonuçların dağılımı cinsinden nicel olarak ifade edilebilir.

**Ölçüm sonuçlarının tekrar gerçekleştirilebilirliği (Reproducibility of results of measurements)** Herbir ölçümün, aşağıdaki değişken koşullarda gerçekleştirildiği zaman, aynı ölçülen büyüklüğe ait ölçüm sonuçları arasındaki uyuma yakınlığıdır.

- ölçüm metodu,
- gözlemci,
- ölçme cihazı,
- konum,
- kullanım koşulları,
- zaman.

Notlar: 1) Tekrar gerçekleştirilebilirlik ifadesinin geçerli olabilmesi için değişen koşulların tanımlanması gerekir.  
2) Tekrar elde edilebilirlik, sonuçların dağılımı cinsinden nicel olarak ifade edilebilir.

**DeneySEL Standart Sapma (Experimental Standard Deviation)** Aynı ölçülen büyüklüğe ait  $n$  adet ölçümden oluşan bir seri için, aşağıdaki formülle verilen  $s$  parametresi deneySEL standart sapmadır ve sonuçların dağılımını karakterize eder;

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$x_i$  :  $i$ . ölçüm sonucu

$\bar{x}$  : değerlendirilen  $n$  adet sonucun aritmetik ortalamasıdır.

**Ölçüm belirsizliği (Uncertainty of measurement)** Ölçülen büyüklüğün gerçek değerini kapsayan değerler aralığını karakterize eden tahmini değer.

Not: Ölçüm belirsizliği, genel olarak bir çok bileşeni içerir. Bu bileşenlerin bir kısmı, ölçüm serilerinin sonuçlarının istatistiksel dağılımına bakılarak deneySEL standart sapma yardımıyla karakterize edilebilir. Diğer bileşenlerin tahmini ise sadece tecrübeye veya eldeki diğer bilgilere dayandırılabilir.

**Standart belirsizlik (Standard uncertainty)** Standart sapma olarak hesaplanabilen bir ölçüm sonucunun belirsizliği.

**A-tipi belirsizlik hesabı (Type A evaluation of uncertainty)** Gözlem serilerinin belirsizlik hesaplarının istatistiksel analiz yöntemi.

**B-tipi belirsizlik hesabı (Type B evaluation of uncertainty)** Gözlem serilerinin belirsizlik hesaplarının diğer (istatistiksel olmayan) yöntemleri.

**Bileşik standart belirsizlik (Combined standard uncertainty)** Bir ölçümün pek çok sayıda başka değerlerden elde edilmiş sonucunun standart belirsizliği, bu değerlerdeki değişimlerin ölçüm sonucunu nasıl etkilediği gözönüne alınarak hesaplanan varyans veya covaryans ifadeleri toplamının pozitif kare köküne eşittir.

**Genişletilmiş belirsizlik (Expanded uncertainty)** Ölçülen bir niceliğin beklentiye göre ölçüm sonucu değerlerinin büyük bir kısmını içeren aralık olarak tanımlanır.

Not: Kapsam olasılığı veya aralığın güven düzeyi tanıtımda adı geçen kısım anlamında gösterilebilir.

**Kapsam faktörü (Coverage factor)** Genişletilmiş belirsizliği hesaplamak amacıyla bileşik belirsizlikle çarpılan sayısal faktör olarak tanımlanır. Pratikte, kapsam faktörünün değeri 2 ve 3 arasında bulunmaktadır.

**Olasılık (Probability)** Değeri 0 ile 1 arası değişen, olayın gerçekleşmesiyle ilgili bir sayı.

**Rasgele değişken (Random variable)** Özel seri değerlerinden herhangi birini alabilen ve olasılık dağılımıyla ilişkili bir değişken.

**Olasılık dağılımı (Probability distribution)** Rasgele değişkenin herhangi bir değeri almasını ve değerlerin verilen düzeye ait olduğunun olasılığını ifade eden fonksiyon.

**Dağılım fonksiyonu (Distribution function)** Rasgele değişken  $X$ 'in belli bir  $x$ 'den küçük veya eşit olması olasılığını ifade eden fonksiyon.

$$F(x) = Pr (X \leq x)$$

**Olasılık yoğunluk fonksiyonu (Probability density function)** Dağılım fonksiyonunun türevi olarak tanımlanır.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Not:  $f(x)dx$  - olasılık elemanı olarak adlandırılır ve

$f(x)dx = Pr(x < X < x+dx)$  ifadesini dikkate alırsak rasgele değişken  $X$ 'in  $[x;x+dx]$  aralığında bulunma olasılığını ifade eder.

**Olasılık ağırlık fonksiyonu (Probability mass function)** Kesikli rasgele değişken  $X$ 'in herhangi bir  $x_i$  değerine eşit olduğunu  $P_i$  olasılığı olarak belirten bir fonksiyon:

$$P_i = Pr ( X = x_i )$$

**Parametre (Parameter)** Rasgele değişkenin olasılık dağılımını ifade etmek için kullanılan bir nicelik.

**Korelasyon (Correlation)** Birden fazla rasgele elemanı olan grup içindeki iki veya daha fazla rasgele değişken arasındaki ilişki.

**Beklenti** (Rasgele değişkenin veya olasılık dağılımının beklentisi); **Beklenen Değer, Ortalama (Expectation, expected value, mean)**

1) Kesikli rasgele  $X$  değişkeninin  $P_i$  olasılığıyla  $x_i$ 'ye eşit olmasının beklentisi (eğer varsa)

$$\mu = E(X) = \sum P_i x_i$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki toplam,  $X$ 'in sahip olabileceği bütün  $x_i$  değerlerine göre verilmiştir.

2)  $f(x)$  olasılık yoğunluğu fonksiyonuna sahip, sürekli rasgele değişken  $X$  için beklenti (eğer varsa)

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

ifadesi ile verilir.

İntegral  $x$  değişkeninin bütün değişim aralığında geçerlidir.

Not: Aritmetik ortalama için  $\mu = \bar{x}$  kullanılır.

**Merkezi raslantı değişkeni (Centred random variable)** Beklentisi 0'a eşit olan rasgele değişken.

Not: Rasgele değişken  $X$ 'in beklentisi  $\mu$  ise, merkezi raslantı değişkeni  $(X-\mu)$  olacaktır.

**Varyans (Variance)** (Rasgele değişkenin veya olasılık dağılımının varyansı) Merkezi raslantı değişkeninin karesinin beklentisi

$$\sigma^2 = V(X) = E [(X-E(X))^2]$$

olarak verilir.

**Standart sapma (Standard deviation)** (Rasgele değişkenin veya olasılık dağılımının standart sapması) Varyansın pozitif kare kökü:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

**$q$  dereceli merkez momenti (Central moment of order  $q$ )**  $(X-\mu)$ 'nün merkezi rasgele değişkeninin  $q$  dereceli beklentisi, değişmeyen dağılımda

$$E [(X-\mu)^q]$$

olarak tanımlanır.

Not: Rasgele değişken  $X$ 'in 2. dereceli merkez momenti varyansdır.

**Normal dağılım (Normal distribution)** Sürekli rasgele değişken  $x$  için  $-\infty < x < +\infty$  aralığında

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

şeklinde olasılık yoğunluğu fonksiyonuna sahip dağılım.

Not: Burada  $\mu$  beklenti ve  $\sigma$  normal dağılımın standart sapması olarak verilmiştir.

**Karakteristik (Characteristic)** Verilen topluluğun elemanları arasındaki benzerliği veya farklılığı belirtmeye yardımcı özellik.

Not: Bu özellik, hem nicelik hem de nitelik olarak verilebilir.

**Topluluk (Population)** Gözönüne alınan rakamların tümü.

Not: Rasgele değişkenler için olasılık dağılımı bu değişkenin topluluğu olarak kabul edilebilir.

**Sıklık (Frequency)** Gözlemlerin sayısı veya belli bir durumun meydana çıkma sayısı.

**Sıklık dağılımı (Frequency distribution)** Değerlerin, karakteristik ve karakteristik sıklıkları veya onların bağıl sıklıklarının arasındaki deneyimler sonucunda oluşturulan (ampirik) ifade.

**Aritmetik ortalama (Arithmetic mean, average)** Değerlerin toplamının değerlerin sayısına bölünmesi sonucunda elde edilen değer.

**Varyans:** Sapmanın ölçümüdür. Herbir ölçümün ortalamasından sapmasının karesinin gözlem sayısının bir eksiğine bölünmesi ile elde edilir.

$n$  tane gözlem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  için

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

varyans ise;

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

**İstatistik (Statistic)** Rasgele değişkenlerin fonksiyon modeli.

**Tahmin yöntemi (Estimation)** Örnekteki gözlemlerden, örneğin alınmış olduğu topluluğun, istatistiksel modeli olarak seçilmiş dağılımın parametrelerine sayısal değerler atama işlemidir.

Not: Bu işlemin sonucu, tek bir değer veya beklenti aralığı olarak hesaplanabilir.

**Tahmin edici (Estimator)** Topluluğun parametresini tahmin etmek amacıyla kullanılan istatistik.

**Tahmin (Estimate)** Tahminin sonucu olarak elde edilen tahmin edicinin değeri.

**Güven katsayısı (Confidence coefficient); Güven düzeyi (Confidence level)** Güven aralığı veya istatistiksel olarak belirlenmiş kapsam aralığı ile ilişkili olasılık değeri.

**İstatistiksel kapsam aralığı (Statistical coverage interval)** Verilen güven düzeyi ile topluluğun en az belli bir kısmını kapsayan aralık.

**Serbestlik derecesi (Degrees of freedom)** Toplamı sınırlayan terimlerin dışında toplamı oluşturan terimlerin sayısı.

#### 4. HATA ANALİZİNDE KULLANILAN TERİMLER

##### Ölçüm

Ölçümün amacı, tanımlanmış ölçüm niceliğinin değerini belirlemektir. Bu nedenle ölçüm, ölçülecek niceliğin, ölçüm yönteminin ve ölçüm işleminin uygun bir şekilde tanımıyla başlar. Genel olarak bir ölçümün sonucu, ölçülen niceliğin sadece bir tahmini veya yaklaşımıdır. Ancak bir belirsizlik ifadesiyle birlikte verilirse tamamlanmış sayılır.

Örneğin, nominal olarak 1m'lik bir çelik çubuğun uzunluğunu  $1\mu\text{m}$  kesinlikle belirlemek istiyorsak, uzunluğun tanımlandığı ortam sıcaklığı, basınç ve diğer uzunluğun tanımlandığı parametreler de verilmelidir. Bununla birlikte eğer uzunluk 1mm kesinlikle belirlenmek isteniyorsa buna gerek yoktur.

Ölçümlerde yapılan hatalar, statik veya dinamik, sistematik veya rasgele olabilir. Hata analizinde en çok kullanılan terimlerin ne anlama geldiğinin bu noktada açıklanmasında yarar vardır.

**Doğruluk (Accuracy)** okunan değerlerin kalibre edilmiş değerden veya gerçek değerden sapmasıdır. Eğer bir voltmetrenin doğruluğu voltmetrenin o aralığında tam sapmasının %2 si olarak veriliyorsa, bu voltmetrede o aralıkta okunan bütün değerler için gerçek değer  $\pm$  %2 farklıdır. Tabii ki voltmetrenin tüm aralığında doğrusal olduğu düşünülürse.

**Kesinlik (Precision)** ardarda okunan değerlerin tekrar edilebilirliğidir. Ardarda yapılan okumalar için farkın ne kadar küçük olduğudur. Eğer fark, doğasında gelişigüzelce ardarda alınan değerlerin farkı küçük olacaktır.

Doğruluk ve kesinlik aynı anlama gelmez. Doğruluk, gerçek değere belli bir kesinlik ile ne derece yakın olduğunu gösterir. Örneğin  $\pi=2.14159$  demek kesinlik açısından kesindir, fakat daha doğru değer 3.14'dür. Dakik okuyan cihaz, eğer kalibre edilmemişse hala dakik okur fakat okuduğu değer doğru değildir.

**Yanlışlık** ise deney şartlarının iyi kontrol edilmemesinden kaynaklanır. Deneyin kurulduğu masadaki titreşim veya laboratuvarın sıcaklığının gerekenden az veya çok olması buna iyi bir örnektir. Böyle bir durum fark edilince derhal düzeltilmelidir.

##### Hata, Etki ve Düzeltme

Genelde ölçüm, sonuçlarda hatalara neden olan, bir takım mükemmellikten uzak unsurlar içerir. Geleneksel olarak hata unsuru iki bileşenden oluşur. Rasgele bileşen ve sistematik bileşen.

Rasgele hata, ölçülen değeri etkileyen niceliklerin, önceden kestirilemeyen, stokastik (kadenci), temporal (hayali olmayan) veya spatial (uzayda) değişimleridir. Rasgele hatalar, tekrarlanan gözlemlerde farklı değerler çıkmasına neden olur. Bir ölçümde rasgele hatayı dengelemek olanaklı değilse de, çok sayıda gözlem yapılarak teorik olarak sifira bile düşürülebilir.

Sistematik hatalar da rasgele hatalar gibi tamamen yok edilemez fakat onların değeri de çok düşürülebilir. Eğer sistematik hata, ölçümü etkileyen niceliğin bilinen bir etkisinden kaynaklanıyorsa bu etki

nicelendirilebilir ve bu etkiyi dengelemek için düzeltme veya düzeltme faktörü uygulanır. Bu uygulamadan sonra sistematik etkenlerden kaynaklanan hatanın beklenen değeri sıfırdır.

**Measurand** (Ölçüme tabi büyüklük veya tanımlanmış ölçüm niceliği)

Bir ölçümün ilk adımı ölçülecek değerin tanımıdır. Bu tek bir değerle değil, bir niceliğin tanımı şeklindedir. Bir nicelik, sonsuz sayıda bilgi olmadan tam olarak tanımlanamaz. Bu nedenle sınırlı sayıda bilgi ile tanımlanmış bir ölçüm niceliğinin belirsizliği, her zaman bu eksik tanım veya yorumdan kaynaklanan, istenen doğruluk sınırlarında anlamlı olmasa bile, bir belirsizlik bileşeni içerir.

### **Gerçek değer ve düzeltilmiş değer**

Gerçekleştirilmek istenen niceliğin ölçümü sonucu elde edilen değer, eğer bu nicelik eksiksiz ve tam olarak tanımlanabilmiş olsaydı, elde edilecek değere göre düzeltilebilir. Gerçekleştirilen niceliğin ölçüm sonucu da bütün bilinen sistematik hatalar için düzeltilir. Son düzeltilmiş sonuç, tanımlanmış ölçümün "gerçek değeri"nin en iyi tahmini olarak ele alınsa da, gerçekte ölçülmesi amaçlanan niceliğin en iyi tahminidir.

Örneğin, tanımlanmış ölçüm niceliği, levha biçiminde bir malzemenin belli bir sıcaklıktaki kalınlığı olsun. Örnek malzeme bu bilinen sıcaklıkta olsun ve levhanın belli bir yerinden mikrometre ile kalınlığı ölçülmüş. Mikrometrenin gösterdiği değer, levhanın ölçülen noktasında, bu sıcaklıkta ve mikrometre tarafından ölçüm sırasında uygulanan basınç altında gerçekleştirilmiş değerdir.

Eğer ölçüm yapılırken malzemenin sıcaklığı ve mikrometre basıncı ölçülür ve mikrometrenin kalibrasyon eğrisi, malzemenin ölçüm sıcaklığındaki davranışı ve mikrometrenin basıncı hesaba katılırsa önceki sonuç düzeltilebilir. Bu düzeltilmiş sonuç, gerçek değer en iyi tahminidir.

Hatalar, sistematik veya rasgele hatalar (error) olabilir. Sistematik hatalar, veriyi her zaman belli bir yönde ve miktarda değiştirir. Rasgele hatalar ise veriyi ortalama değerden sapmalar şeklinde etkiler.

Sistematik hata bellidir ve sabittir. Deneydeki gözlemlerde hep aynıdır. Örneğin, termometre ile ölçülen sistem arasında termal iletişimin iyi olmaması sistematik bir hatadır. Sistematik hatalar:

1. Deneyin tasarlanışından, cihazların diziminden, cihazın kalibrasyonundan veya cihazın durumundan;
2. Deney tekniği veya deney işleminden;
3. İnsan hatasından kaynaklanabilir.

Rasgele hatalar, pekçok tanımlanamayan ve kontrol edilemeyen birbirinden bağımsız küçük doğal etkenlerin sonucunda ortaya çıkan istatistiksel bir niceliktir. O yüzden deneyden deneye değişiklik gösterir. Eğer aynı değeri okumak için çok sayıda ölçüm yapılırsa, verinin ortalama değerden sapmasının dağılımı bulunabilir. Bu sonuçlar, genellikle ortalama değer etrafında gaussian dağılım gösterir. Bu dağılımın ortalama değeri gerçek değer olarak kabul edilir.

Bununla birlikte, deney sırasında alınan verilerin bir dağılım göstermesi, her zaman rasgele hata olmayabilir. Fark, deneyde yapılan sistematik hatalardan kaynaklanabilir, ancak bunlar ortadan kaldırıldıktan sonra verilerin dağılımı rasgele olarak kabul edilebilir.

**Belirsizlik (Uncertainty)** Ölçülen değerlerin belli bir olasılıkla ortalama değer etrafında bulunduğu aralığı tanımlar. Belirsizlik genelde bir rakam olarak verilirken, mutlak veya göreceli olabilir.

Bir ölçümün sonucunda verilen belirsizlik, ölçülen değer tam olarak bilinmemesinden kaynaklanır.

Ölçümün sonucu bütün bilinen sistematik hatalar ele alındıktan sonra bile, hala rasgele hatalar içerir ve sistematik hatalar için de mükemmel olmayan düzeltmeler kullanıldığı için hala ölçülen değer bir tahminidir.

Pratikte bir ölçümdeki belirsizliğin pekçok olası nedeni vardır:

- a. Ölçülen değer tanımıdaki eksiklik;
- b. Ölçülen değer tanımının gerçekleşmesindeki eksiklik;
- c. Ölçülen değeri temsil etmeyen gözlemler yapmak;
- d. Çevre koşullarının ölçülen değere etkisinin bilinmesindeki eksiklikler veya çevre koşullarının ölçümündeki eksiklikler;
- e. Analog cihazların okunmasında personeldeki belli yöne eğilim;
- f. Cihazın çözünürlüğünün sonlu olması veya eşliğinde ayrımcılık;
- g. Ölçüm standartlarının ve referans malzemelerinin değerlerinin tam olarak bilinmemesi;
- h. Verilerin değerlendirilmesinde kullanılan ve dış kaynaklardan elde edilen sabit parametrelerin ve diğer parametrelerin değerlerinin tam olarak bilinmemesi;
- i. Ölçüm yöntemi ve işlemindeki yaklaşımlar veya extrapolasyonlar;
- j. Görünürde aynı olan koşullarda tekrarlanan gözlemlerde, ölçülen değer farklılıklar göstermesi.

Yukarıda sıralanan belirsizlikler birbirlerinden bağımsız değildir ve a'dan i'ye sıralanan hata kaynakları j'de verilen belirsizliğe katkıda bulunur. Belirlenemeyen bir sistematik etken belirsizlik hesaplarında ele alınmadığı halde, ölçüm belirsizliğine katkıda bulunur.

## 5. BELİRSİZLİK HESAPLARINDA İSTATİSTİKSEL KAVRAMLAR

Pek çok deneyin çıktısı ölçümdür. Ölçümlerin güvenilirliği, o deneyin kontrol edilebilen girdilerinin yanısıra, pekçok kontrol edilemeyen hatta farkına bile varılmayan faktörlere bağlıdır. Bu faktörlerden bazıları, deneyi yapan kişi, deneyde kullanılan cihazlar, deneyin yapıldığı ortamdır. Bu şekilde test edilen cihazdan ve ölçülen niceliğin sabit kalmayışından kaynaklanan hatalar yanında, bu yukarıda sözü geçen hatalar da ölçüm sonuçlarını etkiler.

Deneyi yapan kişiden ve destek cihazlarından kaynaklanan hatalar, farklı kişiler ve farklı cihazlar kullanılarak azaltılabilir veya gelişigüzel zamanlarda bu ölçümler yapılarak bu hatalar daha da küçültülebilir. Buna "randomization" denir. Diğer önemli hataları ölçebilmek için, kontrollü bir şekilde aynı girdiler için bağımsız gözlemler yapmak gerekir. Bu olay "replication" olarak isimlendirilir ve istatistiğin temelini oluşturur [7,8].

Yukarıda sözü edilen düşünceleri matematiksel bir dille anlatabilmek için her ölçülen  $X$  için  $\delta$  hatasının yapıldığını kabul edelim. Bunu

$$X \pm \delta \quad (1)$$

olarak ifade edersek  $X \pm \delta$  ifadesi gerçek değer,  $\bar{X}'$  'ı kapsar. Daha önce söylendiği gibi, ölçüm hatası  $\delta$  genellikle iki bileşenden oluşur. Rasgele hata  $\epsilon$  ve sistematik hata  $\beta$ , yani

$$\delta = \epsilon + \beta \quad (2)$$

### 5.1 RASGELE HATALAR

Eğer aynı ölçümler tekrar tekrar yapılırsa rasgele hata  $\epsilon$ , bu ölçümlerin ortalama etrafında bir sapmasını gösterir. Sapma ölçüm yapan cihazların karakteristiğinden ve/veya ölçümü yapılan niceliğin sabit kalmamasından dolayıdır. Ölçüm cihazları belli bir uygun ayrımcılık yaptıkları sürece rasgele hatalar olacaktır. Kesinlik (precision) terimi rasgele hataları karakterize etmek için kullanılır. Kesinlik bütün ölçümlerin hepsinin gerçek standart sapması veya daha çok eldeki verilerin kesinlik indeksi  $s$  (tahmin edici) olarak verilir. Bu istatistiksel terimlerin matematiksel ifadesi ilerdeki bölümlerde verilecektir.  $s$  büyükse veriler geniş bir dağılım gösterir,  $s$  küçük ise veriler daha kesindir.

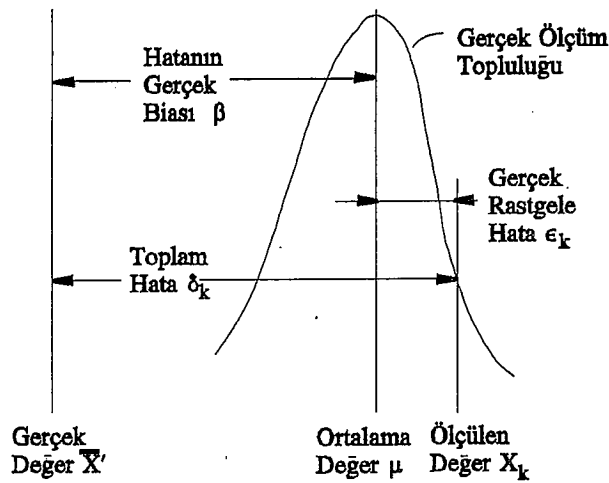
### 5.2 SİSTEMATİK HATALAR

Bütün ölçümlerde rasgele hataların dışında her zaman kabul edilen gerçek değerden daha az veya daha fazla bir değer elde edilir. Bu hatalar sabit hatalar veya sistematik hatalar olarak adlandırılır, ve terminoloji olarak bias (eğilim) diye karakterize edilir.

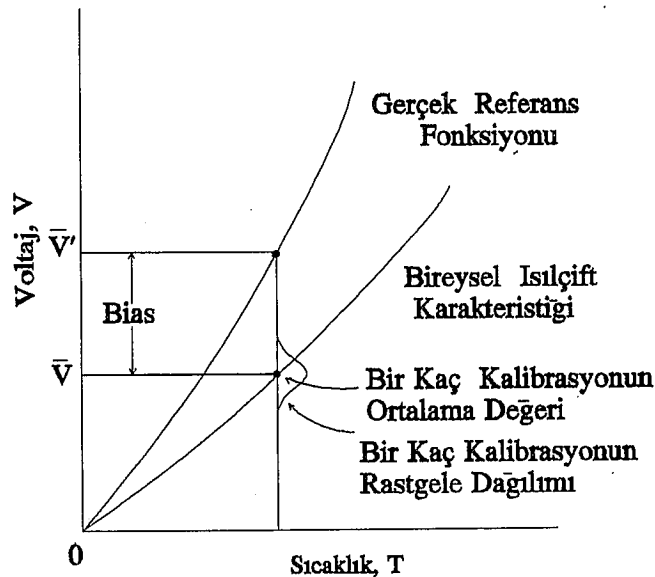
Sistematik hata nicelik olarak gerçek bias  $\beta$ , veya biasın tahmini limiti  $B$  ile belirtilir. Böylece nicelik olarak bilindiğinde bu değer tüm ölçülen değerlere eklenen bir düzeltme faktörü gibi kullanılır. Sıfır bias

gerçek değer  $\bar{X}'$  ile ölçülen değerlerin gerçek ortalama değeri  $\mu$  arasında hiç bir fark yok demektir. Pratikte sıfır biaslı ölçüm ender haldir ve günlük ölçümlerin hepsinde sistematik hataların hesaplanmasına doğru bir eğilim gözlenilir. Burada söylenmek istenen geometrik olarak Şekil 1'de gösterilmiştir.

Sistematik hatalar değişik yöntemlerle azaltılabilir, örneğin ölçüm cihazının kalibrasyonu yapılarak (Şekil 2). Genelde kalibrasyon test cihazın standart cihazla karşılaştırma yoluyla gerçekleştirilir. Bu kalibrasyonlar mükemmel olmadığından toplam bias belirlenmesinde başarıya ulaşmak zordur, diğer bir deyişle bias rasgele bileşene sahip olabilir, ancak bu bileşen sabit ve kesinlik hatası gibi rasgele olmayan bir bileşendir.



Şekil 1. Çeşitli istatistik terimler arasındaki geometrik ilişkiler.



Şekil 2. Isılçift kalibrasyonunda sistematik ve rasgele hataların gösterimi.

### 5.3 İSTATİSTİKSEL İLİŞKİLER

Mühendislikte eğilim (bias) ortadan kaldırılabiliirse diğer hataların rasgele hatalar olduğu kabul edilir. Böylece hatalar istatistiksel olarak ele alınabilir. Bu bölümde değişmeyen hatalar (eğilimden gelen) ihmal edilerek sadece rasgele hatalar (kesinlik) ele alacağız.

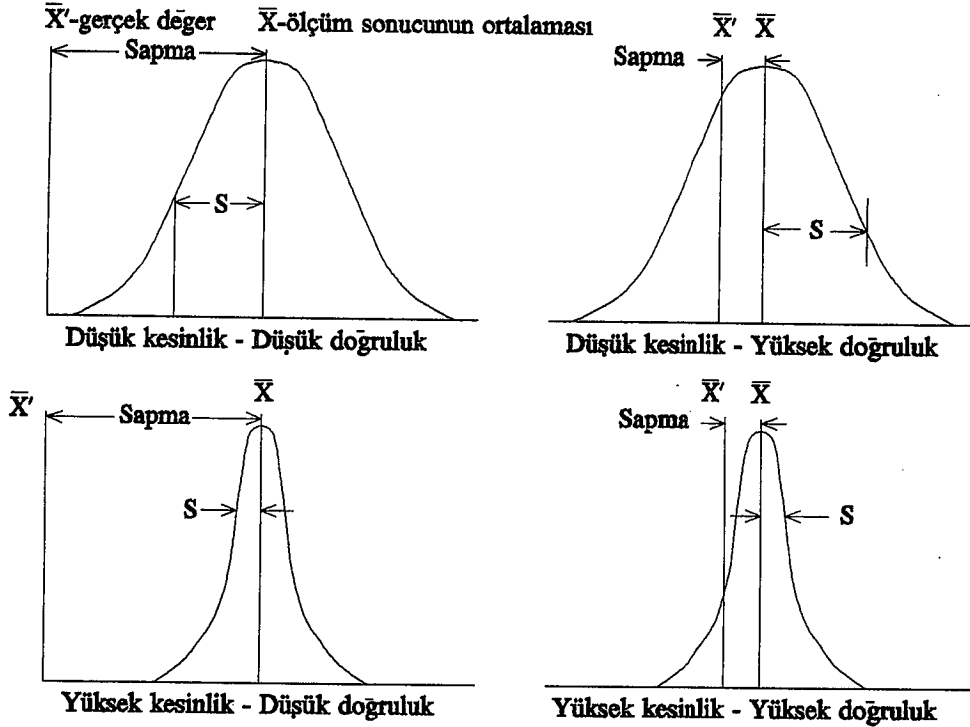
Çok açıktır ki sabit hata olmadığı zaman bile, ölçümün doğası icabı bir değişkenin gerçek değerini elde etmek mümkün değildir. Bu şekilde deneysel verilerden, iki çok önemli bilgiyi çıkarmak deney yapan kişinin görevidir. Bunlardan birincisi değişkenin gerçek değerinin (gerçek değer bundan sonra  $\bar{X}$  olarak işaretlenecektir) bulunmasıdır. Bu değere çok yakından bağlı olan diğer bir değer ise,  $\bar{X}$  üzerinde merkezlenmiş belli ve gerçek değeri kapsayan bir aralığın tahmin edilmesidir. Bu değeri de  $\bar{X}$  ile ilişkili belirsizlik sınırı olarak kabul edelim.

#### 5.3.1. VERİLEN NOKTADA GERÇEK DEĞER

Eğer bir deney sonucu  $X$  birkaç kez ölçülmüşse,  $X$ 'in ortalama değeri

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \quad (3)$$

ölçümde elde edilen değerlerin aritmetik ortalamasıdır. Burada  $X_k$  k.ölçümde elde edilen değerdir,  $N$  ise toplam ölçüm sayısıdır.  $X_k$  değerlerinin  $\bar{X}$  olarak en iyi bir şekilde gösterilmesi matematiksel bir gerçektir.



Şekil 3. Kesinlik ve doğruluk arasındaki fark

Bu şekilde her bir  $X_k$  değerinin  $\bar{X}$  'dan farkının karelerinin toplamı minimumdur (en küçük kareler prensibi).  $\bar{X}$  'in gerçek değer olması yolunda hiçbir garanti yoktur. Diğer bir deyişle, gerçek ölçümlerde her zaman eğilim dikkate alınmalıdır. Buna rağmen topluluğun ortalaması  $\mu$ 'nun en iyi tahmini, verilen koşullarda elde edilen sonuçların ortalaması  $\bar{X}$  'dir (Şekil 3).

### 5.3.2. GÜVENİLİRLİK ARALIĞI

$X$ 'in en uygun değerini bulduktan sonra ikinci olarak bulunması gereken bu uygun değer  $X$ 'in gerçek değerini ne kadar temsil ettiği. Bu her ölçümün sonuna  $\mp$  olarak eklediğimiz niceliktir ve güvenilirlik aralığı ( $CI$ ) olarak adlandırılır. Böylece gerçek değer, güvenilirlik aralığı  $CI(p)$  dikkate alınarak  $\bar{X} \pm CI(p)$  şeklinde verilir. Burada  $p$  ifadenin olasılığıdır.

Bu güvenilirlik aralıklarının elde etmek için aynı değişkenin tekrar tekrar ölçümüne gerek vardır ve bu aralıklar verilerin büyüklüklerine ve sayılarına göre farklılıklar gösterirler.

### 5.3.3. ÇOK SAYIDA YAPILMIŞ ÖLÇÜM SERİLERİ

Çok sayıda ölçüm matematiksel olarak ölçüm sayısı  $N$  büyük ( $N > 10$ ) kabul edilir. Tekrarlanan gözlemler sonucunda farklı  $X$  değerinin kaç kez okunduğu Gauss-Laplace normal dağılımıyla çok yakın bir yaklaşımla ifade edilebilir [9].

$$f(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} f(X)$  bütün  $X$ 'ler için integrali alındığında 1'e eşit olabilmesi için gereken normalizasyon faktörüdür ve  $\sigma$   $X$ 'in gerçek standart sapmasını gösterir.  $\sigma$  çok yakın bir şekilde

$$\sigma = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \mu)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir.

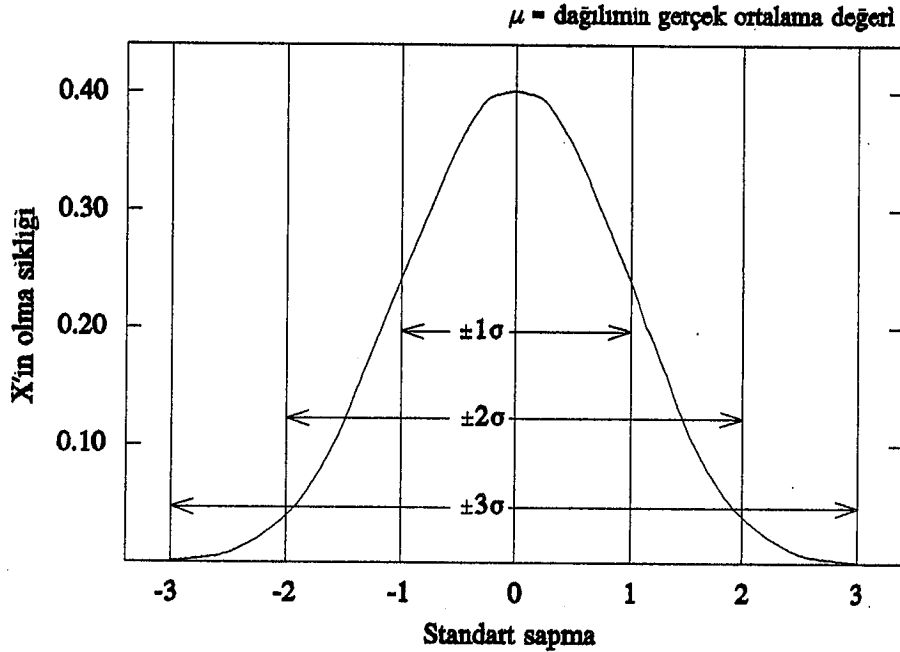
$X$ 'in normal dağılımının standart sapması şu özellikleri taşır:

1.  $\sigma$  belli bir  $X$  değerinin ne kadar saçıldığıнын ölçüsüdür, bir başka deyişle kesinlik hatası  $\epsilon$ 'nin ölçütüdür.
2.  $\sigma$  ve  $X$  aynı birimle ifade edilir.
3.  $\sigma$  gözlemlenen bütün olası değerlerin, gerçek ortalama değer  $\mu$ 'den sapmalarının karelerinin toplamının kareköküdür

(4) ve (5)'de gösterildiği gibi dağılımın merkez noktası topluluğun ortalamasıdır. Daha önce söylendiği gibi verilen koşullarda ortalama değer gerçek değer  $\bar{X}$  'in en iyi tahmini olduğundan  $f(x)$  dağılımını ve sapma  $\sigma$ 'yi tanımlayan ifadelerde de  $\mu$  kullanılmıştır.  $\mu$  sonsuz sayıda gerçekleşen gözlemlerin ortalamasıdır.

Normal dağılımda, merkez  $\mu$  olmak üzere olası değerlerin %68.26'sının  $\pm 1\sigma$  aralığında olduğu anlamına gelir. Fakat pekçok uygulama için bu aralık yeterli değildir. O yüzden daha büyük güvenilirliğe sahip daha geniş aralıklar kullanılır. Değerlerin %95.46'sının  $\pm 2\sigma$  aralığı içinde yer aldığı veya değerlerin %99.73'nün  $\pm 3\sigma$  aralığı içinde yer aldığı Şekil 4'de gösterilmiştir.

Bu noktada,  $\bar{X}$  'in  $\mu$ 'nün çok iyi bir tahmini olduğuna ikna olduysak da tek bir ölçüm olan  $X$ 'in ne derece



Şekil 4.  $X$ 'in normal dağılımı

tipik bir değer olduğunu sorabiliriz. Bu sorunun bir cevabı

$$X \pm 3\sigma \quad (\%99.73'lik \text{ güvenilirlikle}) \quad (6)$$

olabilir.

Bu ifade ölçüm sonuçlarının %99.73'de  $\mu$ 'nün  $X \pm 3\sigma$  tarafından kapsandığı anlamına gelir. Buradan bir ölçüm sonucunda beyan edilecek ifadenin 3 parçadan oluştuğu görülür [10,11]:

1. Ölçümün büyüklüğü ( $X$ );
2. Güvenilirlik aralığı (bu hatanın ne olduğu konusunda bizim tahminimizdir  $\pm 3\sigma$ );
3. Olasılık ifadesi (seçilen güvenilirlik aralığında ne derece emin olduğumuzun ifadesi yukarıdaki ifadede %99.73).

#### 5.3.4. TEK SERİLİ AZ SAYIDA YAPILMIŞ ÖLÇÜM

Pratik yaşamda bir değişken üzerinde yapılan ölçümlerin sayısı sınırlıdır. Genellikle  $X$ 'in bütün olası değerleri arasında oldukça küçük bir miktarı ölçülür. Bu gerçek aritmetik ortalama  $\mu$ 'nün elde edilememesi

böylece doğru standart sapmanın ( $\sigma$ ) bulunamaması demektir. Bu durumda ulaşılamayacak sapma ( $X_k - \mu$ ) yerine sadece  $(X_k - \bar{X})$  farkı bulunabilir. Bir veri örneğinin kesinlik indeksi

$$s = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

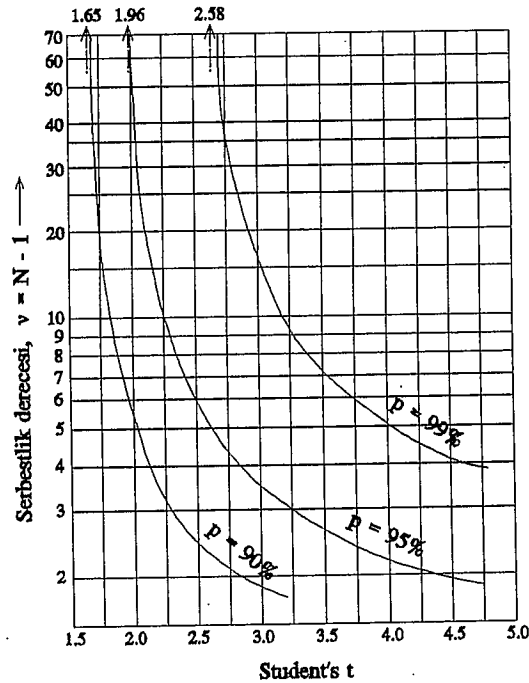
olarak verilir. Burada  $\mu$  yerine  $\bar{X}$  kullanıldığı için meydana gelebilecek negatif eğilimin etkisini yok edebilmek için farklar oluşturulurken  $N$  yerine  $(N-1)$  kullanılmıştır. Fakat yine de az sayıda değerler için standart sapma elde edilebilen  $s$  arzu edilen  $\sigma$ 'ya eşit değildir.

### 5.3.5. STUDENT'S İSTATİSTİĞİ

Yukarıdaki sorunu çözebilmek için W.S Gosset tarafından oluşturulan tablo kullanılır. Bu tabloda güvenilirlik aralıkları tek bir grup, az sayıdaki değerlerin kesinlik indeksine dayanarak bulunabilir. Students istatistik diye adlandırılan, bu istatistikte değerler serbestlik ( $\nu$ ) ve istenilen güvenilirlik ( $p$ ) derecelerine göre verilmiştir (Tablo 1 ve Şekil 5).

Tablo 1'deki değerlerin yakından incelenmesi şunu gösterir ki, ölçümlerdeki gerçek standart sapma  $\sigma$  tam belirlenmediğinden ve bunun yerine az sayıda yapılmış ölçümler için  $t$ -istatistiği kullanıldığında güvenilirlik aralığı genişlemektedir (Şekil 6).

Serbestlik derecesi gözlemler sonunda elde edilen değerlerin sayısı eksi bu verilerden hesaplanan sabitler olarak bulunur. Eşitlik (3)'e göre  $\bar{X}$   $N$  serbestlik derecesine sahipken, eşitlik (7)'e göre  $s$   $N-1$  serbestlik derecesine sahiptir, çünkü  $s$ 'i hesaplayabilmek için sadece  $\bar{X}$  kullanılmıştır.



Şekil 5. Student's istatistiği

Tablo 1. Normal dağılım için Student istatistiği.

$\nu = N - 1$	$t_{90\%}$	$t_{95\%}$	$t_{99\%}$
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
11	1.796	2.201	3.106
12	1.782	2.179	3.055
13	1.771	2.160	3.012
14	1.761	2.145	2.977
15	1.753	2.131	2.947
16	1.746	2.120	2.921
17	1.740	2.110	2.898
18	1.734	2.101	2.878
19	1.729	2.093	2.861
20	1.725	2.086	2.845
21	1.721	2.080	2.831
22	1.717	2.074	2.819
23	1.714	2.069	2.807
24	1.711	2.064	2.797
25	1.708	2.060	2.787
26	1.706	2.056	2.779
27	1.703	2.052	2.771
28	1.701	2.048	2.763
29	1.699	2.045	2.756
30	1.697	2.042	2.750
40	1.684	2.021	2.704
60	1.671	2.000	2.660
120	1.658	1.980	2.617
$\infty$	1.645	1.960	2.576

Yine tek bir değer  $X$ 'in ne derece tipik bir değer olduğunu söyleyebilmek için,  $s$  ve  $t$  kullanarak

$$X \pm t_{\nu,p} s \quad (\text{verilen } p \text{ olasılığıyla}) \quad (8)$$

şeklinde yazabiliriz.

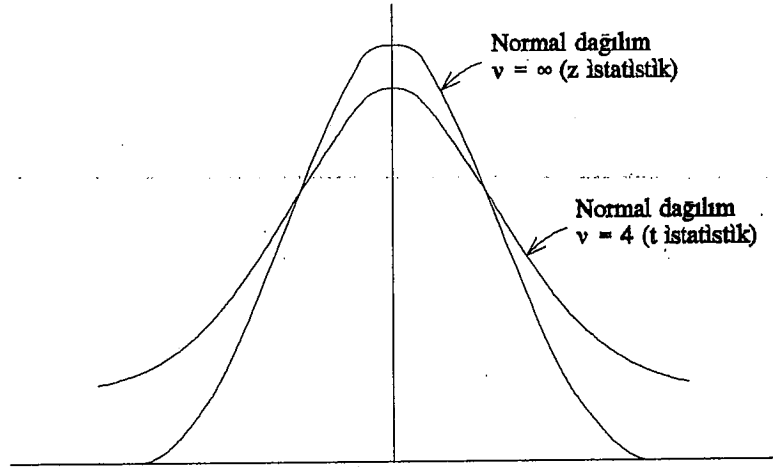
$\nu$ ,  $s$  için serbestlik derecesini gösterir ve yukarıdaki ifade  $\mu$ 'nün  $p$  olasılığıyla  $X \mp ts$  ile tanımlanan aralıkta olduğunu söyler.

İfade (8)  $\sigma$  cinsinden diğer bir şekilde, daha önce (6)'da verilmiştir. Bu ifade genelleştirilmiş halde

$$X \pm z_p \sigma \quad (\text{verilen } p \text{ olasılığıyla}) \quad (9)$$

olarak yazılabilir.

İfade (8) ve (9)'da gösterilen artı ve eksi kısımlar, yani  $\mp ts$  ve  $\mp z\sigma$  güvenilirlik aralığıdır. Normal sapma  $z$ 'nin yaklaşık değerleri tablo 2'de verilmiştir.  $z$  ve  $t$  istatistikleri Şekil 6'da karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.  $z$  ve  $t$  istatistiklerinin karşılaştırılması

Tablo 2. Normal sapmanın değerleri

Olasılık $p$ (%)	80	90	95	98	99	99.8
Normal sapma $z$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

### 5.3.6. AZ SAYIDA $N$ ÖLÇÜMÜN BİRKAÇ KEZ TEKRARI

Birden fazla sayıdaki bir dizi deneyde gözlemlenen dağılımın ortalamasının kesinlik indeksi (precision index of the mean) genel olarak

$$s_{\bar{X}} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^M N_i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{\sum_{i=1}^M N_i} \right]^{1/2} \quad (10)$$

eşitliğiyle verilir.

Yukarıdaki ifadede  $M$ , kaç seri deney yapıldığını,  $\bar{X}_i$   $i$ .dizi deneyin ortalaması,  $N_i$  ise gözlem sayısını gösterir. Bu halde  $M$  sayıdaki dizi deneyin toplam ortalaması ise

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^M N_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^M N_i} \quad (11)$$

eşitliğiyle verilir.

Doğal olarak,  $\bar{\bar{X}}$  tek bir seri az sayılı ölçümlü deney sonuçları için verilen koşullarda tahmin edilen en iyi değerdir. Eğer her seri deneyde aynı  $N$  sayıda gözlem yapılmışsa,  $M$ .gözlem dizisi için aynı  $N$  kullanılarak, yukarıdaki iki eşitlik

$$s_{\bar{X},N} = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N_i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

ve

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{X}_i = \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^{MN} X_k \quad (13)$$

haline dönüşür.

Aynı büyüklüğün belli sayıdaki ölçümlerinin ortalamalarının birbirlerine tek bir sayıda ölçümün ayrı ayrı değerlerinden daha yakın olması gözlenebilir bir olaydır. Eşitlik (12)  $M$  sayıdaki  $\bar{X}$  değerlerinin kesinlik indeksini verirken, eşitlik (7)  $N$  sayıdaki  $X$  değerinin kesinlik indeksini verir. İstatistiksel teoriye göre bu iki değer arasında önemli bir ilişki vardır ve bu ilişki

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{N}} \quad (14)$$

dir. Burada  $N$  tüm  $M$  serilerdeki ölçüm sayısını gösterir. Eşitlik (14) temel olarak bir ölçüm dizisinin (setinin) ortalaması olan  $\bar{\bar{X}}$ , bu ölçüm dizisini meydana getiren tek tek gözlemlerin herbiri  $X_k$ 'dan  $1/\sqrt{N}$  kadar daha kesindir. Bu şekilde  $M$  seri dizi ölçümün toplam ortalaması  $\bar{\bar{X}}$ 'in kesinlik indeksi de

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_{\bar{X}}}{\sqrt{M}} = \frac{s_X}{\sqrt{MN}} \quad (15)$$

ifadesiyle verilebilir.

Burada karşılaşılan soru: birden fazla sayıda seri deney yapıldığında hangi  $s_X$  kullanılmalıdır ?

$s_{X_i}$  değerlerinden herbiri kullanılabilir. Ancak bu halde  $s_{\bar{X}}$  'deki değişim çok geniş olacaktır. Diğer bir seçenek ise, herbir  $s_{X_i}$  'nin serbestlik derecelerini kullanarak ağırlıklı ortalamasını bulmaktır.

$$s = \left[ \frac{\sum_{i=1}^M v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^M v_i} \right]^{1/2} = \left[ \frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 + \dots + v_M s_M^2}{v_1 + v_2 + \dots + v_M} \right]^{1/2} \quad (16)$$

Çoğunlukla herbir set ölçümde aynı sayıda gözlem yapıldığı için, yani  $N$ 'in değeri bütün setler için aynı olduğundan  $\bar{s}$  aşağıdaki ifadeyle belirlenir

$$s_N = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s_i^2 \right]^{1/2} \quad (17)$$

$t$  istatistiği kullanarak gerçek ortalama  $\mu$ 'yu en iyi şekilde kapsayan aralık tek bir set ölçümlerin ortalaması için

$$\bar{X} \pm \frac{t_{N-1, \nu} s_X}{\sqrt{N}} = \bar{X} \pm t_{N-1, \nu} s_{\bar{X}} \quad (18)$$

ve  $M$  seri ölçümün ortalaması için

$$\bar{X} \pm \frac{t_{MN-M, \nu} s}{\sqrt{MN}} \quad (19)$$

ifadeleri ile hesaplanır.

$t$ 'nin indeksleri serbestlik derecesi  $\nu$  ve olasılığını gösterirken,  $\pm$  ile yazılmış olan kısım güvenilirlik aralığını gösterir. Bu ifade serbestlik derecesi  $MN-M$  olarak alınmıştır çünkü, tek bir  $\bar{X}$  değil,  $M$  tane  $\bar{X}$  elde edilmiştir.

Daha önce bahsedilen kavramlarla ilgili bazı sayısal örnekler aşağıda verilmiştir.

**Örnek 1.**  $X_i = 7, 8, 7, 6, 5, 6, 7, 8, 6, 9, 8$  değerleri için gerçek ortalama  $\mu$ 'nun en uygun değerini ve bu gözlemlerin kesinlik indeksini, ortalamanın kesinlik indeksini ve  $\bar{X}$  için %95 güvenilirlik aralığını bulunuz [12].

**Çözüm:** Eşitlik (3)'e göre  $\mu$ 'nun en uygun değeri

$$\bar{X} = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} X_i = \frac{77}{11} = 7$$

olarak bulunur. Eşitlik (7) kullanılarak

$$s_x = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{11} (X_i - 7)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{14}{10}} = 1.18$$

ve bu değer gözlemlerin kesinlik indeksidir. İfade (14)'e göre önceki değeri kullandığımızda ortalamanın kesinlik indeksini

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \frac{1.18}{\sqrt{11}} = 0.357$$

olarak bulunur.

Tablo 1'den serbestlik derecesi 10 ve %95'lik olasılık için t-istatistiğinden bir değer bulunur.

$$t_{v, p} = t_{10, 0.95} = 2.228$$

Buradan eşitlik (18)'e dayanarak  $\mu$ 'nün bulunduğu aralık şöyle gösterilebilir:

$$\bar{X} \pm t_{n-1, p} s_{\bar{X}} = 7 \pm 2.228 \cdot 0.357 = 7 \pm 0.795,$$

veya ifade  $\mu$  için

$$6.2 \leq \mu \leq 7.8 \quad \%95 \text{ güvenilirlik ile.}$$

şeklinde verilebilir.

**Örnek 2.** 8 gözlemlili tek bir deney için en uygun değeri ve onun %95 güvenilirlik aralığını hesaplayınız.

**Çözüm:**  $N=8$  için eşitlik (18) ve tablo 1'i kullanarak serbestlik derecesi  $\nu = 7$  için  $t_{7, 0.95} = 2.365$  değeri bulunur.

Buradan

$$\bar{X} \pm \frac{2.365 s_x}{\sqrt{8}} \quad \% 95 \text{ güvenilirlik ile.}$$

Böylece ölçüm sonuçlarını kullanarak gözlemlerin kesinlik indeksi  $s_x$  hesaplandığında en uygun değerinin bulunabileceği aralık oldukça kolay belirlenir.

**Örnek 3.** Örnek 2'deki 5 seri ölçüm sonucu verilmişse, en uygun değerinin güvenilirlik aralığının ne kadar değişebileceğini hesaplayınız.

**Çözüm:** Örnekteki verilere göre  $M=5$  ve  $N=8$ 'dir. Bu durumda  $MN=40$  için eşitlik (19)'a göre ve Tablo 1'den serbestlik derecesi  $\nu=MN-M=35$  için

$$t_{\nu,p}=2.031.$$

değeri bulunur.

Buradan, %95 güvenirlilik ile

$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{2.031 s_x}{\sqrt{40}}$$

Bu ifadeye  $s_x$ 'in değişmediği, diğer bir deyişle sabit olduğu tahmin edilmektedir. Gerçekte ise  $s_x$  değişir ve onun yerine eşitlik (17)'de yer alan ağırlıklı standart sapma  $\bar{s}$  kullanılmalıdır.

Örnek 2 ve 3'ün sonuçlarının oranı hesaplandığında aşağıdaki değer elde edilir.

$$\frac{2.365 / \sqrt{8}}{2.031 / \sqrt{40}} = \frac{0.836}{0.321} = 2.6$$

Görüldüğü gibi, çok sayılı seriler için güvenirlilik aralığı 3 defa daha dardır.

**Örnek 4.** 5 gözlemlili 3 defa yapılan ölçüm sonucu olarak aşağıdaki tablo elde edilmiştir.

$M$	$\bar{X}$	$s$
1	- 0.2052	0.6719
2	- 0.2232	0.6395
3	0.1030	1.2168

Ölçüm serilerinin uygun değeri  $\mu$  ve onun %95'lik güvenirlilik aralığını bulunuz.

**Çözüm:** Eşitlik (13)'e dayanarak,

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{3} \left[ - 0.2052 - 0.2232 + 0.1030 \right] = - 0.1085$$

Eşitlik (17)'den ise

$$\bar{s} = \left[ \frac{1}{3} ( 0.6719^2 + 0.6395^2 + 1.2168^2 ) \right]^{\frac{1}{2}} = 0.8834$$

Daha sonra  $\nu=MN-M=12$  için eşitlik (19)'a göre %95 güvenirlilik ile

$$CI_{\bar{x}} = \frac{2.179 \cdot 0.8834}{\sqrt{15}} = 0.4970$$

değer bulunur. Buradan  $\mu$ 'nun değerinin  $-0.1085 \pm 0.4970$  olduğu bildirilebilir.

**Aralık:** Görüldüğü gibi güvenilirlik aralığı  $CI$  kullanılan istatistiğe göre  $z\sigma$  (eşitlik (9)) ve  $ts$  (eşitlik (8)) cinslerinden hesaplanabilir. Bu yöntemlere ek olarak  $CI$ 'nin belirlenmesi için  $s$ 'in tahmin edilmesine dayanan diğer bir yöntem de kullanılabilir. Kesinlik indeksi  $s$ 'in belirlenmesi için serideki ölçülen en büyük ve en küçük değerler arasındaki fark olarak tanımlanan  $R$  aralığı kullanılır. Matematiksel olarak bu ilişki aşağıda gösterildiği gibidir:

$$s = \frac{\bar{R}}{(d_2^*)_N} \quad (20)$$

Burada  $\bar{R}$   $M$  seri ölçümlerin ortalama aralığıdır.  $N$  ölçüm sayısı  $M$  serili ölçümler için

$$\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M R_i \quad (21)$$

ifadesi geçerlidir.  $d_2^*$ 'nin değeri ölçüm sayısı  $N$ 'in fonksiyonu olarak Tablo 3'de verilmiştir [13].

Bu yöntem kullanılırken serbestlik derecesinin sayısı azalacaktır, dolayısıyla  $s$ 'i tahmin eden bu yöntem diğerlerine göre daha düşük duyarlılığa sahiptir. Ancak kullanım açısından  $s$ 'in (20)'ye göre tahmin edilmesi daha uygundur.

Tekli ölçüm serisinin aralığıyla kesinlik indeksi  $s$  tahmin edildiği zaman ifade (20)'deki  $d_2^*$ 'nin yerine  $d_2$  ( $d_2^*$ 'nin sonsuz değeri) kullanılır, ve yaklaşım derecesi Tablo 3 yardımıyla belirlenebilir.

$s$ 'in bulunmasından tamamen vazgeçip, belirsizlik hesaplarında aralıklar kullandığımızda, güvenilirlik aralığının ifadeleri yer değiştirme  $t$ -istatistiği yardımıyla verilebilir. Bu istatistiğin diğer bir adı da  $\tau$ -istatistiğidir. %90, 95 ve 99 güvenilirlik düzeyleri için  $\tau$ -istatistiği için bazı değerler Tablo 4'de verilmiştir.

İfade (18) ve (19)'a benzer bir şekilde tekli ölçüm serisi için

$$\bar{X} \pm \tau_{N,p} R \quad (22)$$

ve  $M$  ölçüm serisinin ortalama değeri için

$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{\tau_{N,p} \bar{R}}{\sqrt{M}} \quad (23)$$

formülleri geçerlidir.

Tablo 3. Ortalama aralıkların dağılımı ile ilişkin değerler.

Serilerin Sayısı $M$	Serideki gözlem sayısı $N$											
	5		6		7		8		9		10	
	$\nu$	$d^*_{.2}$	$\nu$	$d^*_{.2}$	$\nu$	$d^*_{.2}$	$\nu$	$d^*_{.2}$	$\nu$	$d^*_{.2}$	$\nu$	$d^*_{.2}$
1	3.8	2.48	4.7	2.67	5.5	2.83	6.3	2.96	7.0	3.08	7.7	3.18
2	7.5	2.40	9.2	2.60	10.8	2.77	12.3	2.91	13.8	3.02	15.1	3.13
3	11.1	2.38	13.6	2.58	16.0	2.75	18.3	2.89	20.5	3.01	22.6	3.11
4	14.7	2.37	18.1	2.57	21.3	2.74	24.4	2.88	27.3	3.00	30.1	3.10
5	18.4	2.36	22.6	2.56	26.6	2.73	30.4	2.87	34.0	2.99	37.5	3.10
6	22.0	2.35	27.1	2.56	31.8	2.73	36.4	2.87	40.8	2.99	45.0	3.10
7	25.6	2.35	31.5	2.55	37.1	2.72	42.5	2.87	47.5	2.99	52.4	3.10
8	29.3	2.35	36.0	2.55	42.4	2.72	48.5	2.87	54.3	2.98	59.9	3.09
9	32.9	2.34	40.5	2.55	47.7	2.72	54.5	2.86	61.0	2.98	67.3	3.09
10	36.5	2.34	44.9	2.55	52.9	2.72	60.6	2.86	67.8	2.98	74.8	3.09
$d_2$		2.33		2.53		2.70		2.85		2.97		3.08

Tablo 4. Yerdeğiştirme t-istatistiği ( $\tau$ -istatistiği).

$N$	$\tau_{90\%}$	$\tau_{95\%}$	$\tau_{99\%}$
2	3.175	6.353	31.828
3	0.885	1.304	3.008
4	0.529	0.717	1.316
5	0.388	0.507	0.843
6	0.312	0.399	0.628
7	0.263	0.333	0.507
8	0.230	0.288	0.429
9	0.205	0.255	0.373
10	0.186	0.230	0.333
11	0.170	0.210	0.302
12	0.158	0.194	0.277
13	0.147	0.181	0.256
14	0.138	0.170	0.239
15	0.131	0.160	0.224
16	0.124	0.151	0.212
17	0.118	0.144	0.201
18	0.113	0.137	0.191
19	0.108	0.131	0.182
20	0.104	0.126	0.175

**Örnek 5.** Tablo 4 ve ifade (22)'e dayanarak  $N=2,3$  ve 4 için  $\bar{X}$  'in  $\mu$ 'dan ne kadar uzak olabileceğini hesaplayınız.

**Çözüm:** İki gözlemleri için,

$$\begin{aligned} CI_{\bar{X}} &= \tau_2 R = 6.353 R && \%95 \text{ güvenilirlik ile} \\ &= 31.828 R && \%99 \text{ güvenilirlik ile.} \end{aligned}$$

Aynı şekilde üç gözlemleri için  $CI_{\bar{X}} = 1.304 R$  %95 güvenilirlik ile ve  $3.008 R$  %99 güvenilirlik ile. Bir ölçüm fazla yapıldığında güvenilirlik aralığının ne kadar sıkıştığı açıktır. Seride dört gözlem olduğu zaman

$$CI_{\bar{X}} = \tau_4 R = 0.717 R \quad \%95 \text{ güvenilirlik ile ve } 1.316 R \quad \%99 \text{ güvenilirlik ile.}$$

Verilen örneklerden görüldüğü gibi, ölçüm sayısı artırıldığında ölçülen değer dağılımı hakkında daha doğru bilgi elde edilir.

**Örnek 6.** Her biri 5 gözlem içeren iki seri ölçüm sonucu olarak aşağıdaki tabloda verilen değerler elde edilmiştir.

M	R	$\bar{X}$
1	1.516	0.4506
2	0.815	0.0478

$\mu$ 'nun en uygun değerini ve güvenilirlik aralığını bulunuz.

**Çözüm:** Eşitlik (13)'den

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{2} ( 0.4506 + 0.0478 ) = 0.2492$$

İfade (21)'e uygun olarak,

$$\bar{R} = \frac{1}{2} ( 1.516 + 0.815 ) = 1.1655$$

Eşitlik (23)'e göre ve Tablo 3'ten  $N=5$  ve  $p=\% 95$  için  $\tau_{5,95}=0.507$  değerini kullanarak güvenilirlik aralığını

$$CI_{\bar{X}} = \frac{\tau_N \bar{R}}{\sqrt{M}} = \frac{0.507 \cdot 1.1655}{\sqrt{2}} = 0.4178$$

olarak buluruz.

Buradan %95 güvenilirlikle  $\mu$ 'nun değerinin  $0.2492 \pm 0.4178$  aralığında olduğu söylenebilir.

$\sigma$ 'nın bilinip, ölçüm sayısı  $N$ 'nin küçük olduğu durumlar: Bazı zamanlar  $\sigma$ 'nın değeri deneyin sonucu olarak verilebilir. Böyle durumlarda ölçüm sayısı az olsa bile  $\mu$ 'nun değerinin bulunması mümkün olabilir. Buna örnek olarak eşitlik (18), (19), (22) ve (23) kullanılarak tek bir ölçüm dizisi için

$$\bar{X} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{N}} \quad (24)$$

ve çok sayılı ölçüm dizisi için

$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{MN}} \quad (25)$$

Güvenilirlik aralıklarının bulunması için genel üç yöntem özetlenmiş şekilde Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Güvenilirlik aralığının belirlenmesi için yöntemler.

Mevcut İstatistik	Çarpanlı İstatistik	Güvenilirlik Aralığı	
		Tek Serinin Ortalaması $\bar{X}$	Bir Kaç Serinin Ortalaması $\bar{\bar{X}}$
$\sigma$	$z$	$z_p \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$z_p \frac{\sigma}{\sqrt{MN}}$
$s$	$t$	$t_{N-1,p} \frac{s}{\sqrt{N}}$	$t_{MN-M,p} \frac{s}{\sqrt{MN}}$
$R$	$\tau$	$\tau_{N,p} R$	$\tau_{N,p} \frac{\bar{R}}{\sqrt{M}}$

**Örnek 7.** Dört kere yapılan sıcaklık ölçümlerinin ortalaması  $24.15^\circ\text{C}$  olarak bulunmuştur. Tecrübe ile sabittir ki, %95 güvenilirlikle hiç bir sıcaklık ölçümündeki hata  $\pm 0.1^\circ\text{C}$ 'dan fazla değildir. Sıcaklığın en uygun değeri hangi güvenilirlik aralığında bulunabilir?

**Çözüm:** Tek serili ölçüm için, ifade (9) ve Tablo 2'ye uygun bir şekilde  $\bar{T}$ 'nin değeri %95 güvenilirlik ile

$$\bar{T} \pm 1.96\sigma$$

aralığında bulunabilir.

Dört ölçümün ortalaması için (24)'e göre  $\bar{T}'$  'in değeri %95 güvenilirlikle

$$24.15 \pm \frac{1.96\sigma}{\sqrt{4}}$$

aralığında bulunmalıdır, veya  $1.96\sigma=0.1^\circ\text{C}$  kabul edersek, aralık şu şekilde yazılabilir:

$$24.15 \pm \frac{0.1}{2}$$

Yani  $\bar{T}'$  'nin değeri şöyle gösterilebilir:

$$24.10^\circ\text{C} \leq \bar{T}' \leq 24.20^\circ\text{C} \quad \%95 \text{ güvenilirlikle.}$$

Diğer bir deyişle,  $T'$  nin en çok beklenen değeri  $24.15^\circ\text{C}$ 'dir. Oysa, %95 güvenilirlikle sıcaklığın gerçek değeri  $24.1$  ile  $24.2^\circ\text{C}$  arasındadır.

#### 5.4. ÖLÇÜLEN BÜYÜKLÜĞÜN TOPLAM BELİRSİZLİĞİ

Ölçüm sırasında rastlanan her iki tip hatadan (sistemik ve rasgele) bölüm 5.1'de bahsedilmiştir. Bölüm 5.2'de ise rasgele hataların istatistik yöntemlerle güvenilirlik aralığının hesaplanması açıklanmıştır. Rasgele hatalar istatistiksel, sistemik hatalar ise istatistiksel olmayan yöntemlerle hesaplandığından, bu iki hata tipi birbirine basitçe eklenemez. Bu nedenle belirsizliklerin belirlenmesinde bir yöntem, bu hataların ayrı-ayrı hesaplayarak ve böylece beyan etmektir.

Fakat ölçümlerin çoğunluğunda belirsizliği belirleyen tek bir rakama ihtiyaç vardır. Bu yüzden tekrar tekrar yapılan herhangi bir büyüklüğün (örneğin, sıcaklık veya basınç) ölçümlerinde rastlanan rasgele ve sistemik hatalar belli bir yöntemle birleştirilerek belirsizliği tanımlayan tek bir rakam oluşturulur. Hatanın eğilimi  $B$  ve hatanın kesinliği  $t_{95} s_{\bar{x}}$  bileşiminden oluşan bu rakama belirsizlik ( $U$ ) denir.

Bilimsel çevrelerde, toplam belirsizliğin belirlenmesi için belli bir kıstas olmadığından, bu işlem keyfi bir olaydır. Bu yüzden belirsizlik için her iki tanımın aynı derecede kullanılması şaşırtıcı olmamalıdır. Metrolojide izlenebilirliğin oluşturulabilmesi için belli bir yöntemin seçilmesinin gerektiği bu noktada bir daha ortaya çıkmaktadır.

Bir çok tutucu modellerde belirsizlik

$$U_{ADD} = B + t_{95} s_{\bar{x}} \quad (\%99 \text{ güvenilirlik ile}) \quad (26)$$

şeklinde ifade edilir. Burada alt indeks ADD hata bileşenlerinin basit toplamı olarak oluşturulmuş, ve modelde beklenen uygun değer için güvenilirlik düzeyinin %99 olduğu belirtilir.

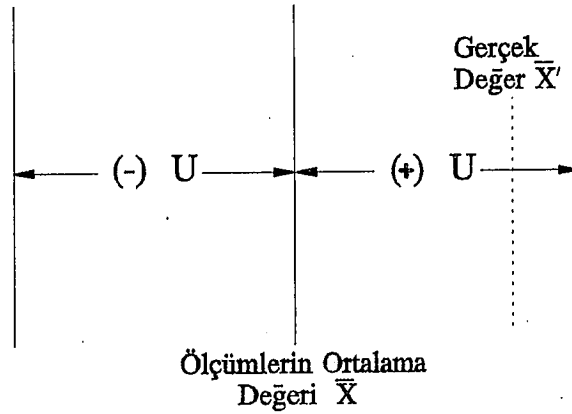
Belirsizliğin daha gerçek bir şekilde belirlenmesi için hataların bazı faydalı kısaltmalarının yer alabileceği düşünülür, diğer bir deyişle, tüm hataların aynı yönlerde bulunamayacağı tahmin edilir.

$$U_{RSS} = [ B^2 + (t_{95} s_{\bar{x}})^2 ]^{1/2} \quad (\%95 \text{ güvenilirlik ile}) \quad (27)$$

(27) ile tanımlanan model karelerin toplamının kare kökü olarak belirlenir. Burada RSS alt indeksi

karelerin toplamının kare kökü (Root Sum Square) olarak oluştuğunu sergilemektedir, ve bu model için güvenilirlik düzeyinin %95 olduğu parantez içerisindeki rakam gösterir.

Modellerin her biri ölçülen parametrenin verilen kapsamı için beklenen hata sınırını gösterir, yani belirsizlik (2)'deki toplam hata  $\delta$ 'nın en iyi değeridir. Kapsam değeri ölçülen parametrenin gerçek değerinin  $\bar{X}'$  en uygun değer  $\bar{X}$  artı veya eksi belirsizlik değeri  $\pm U$  ile belirlenen aralıkta bulunmasının beklenen olasılığını tanımlamaktadır. Belirsizlik aralığı Şekil 7'de gösterilmektedir.



Şekil 7. Belirsizliğin kapsadığı aralık.

Pratikte, (27) ile tanımlanan RSS modeli daha sık kullanılarak, rasgele ve sistematik hataların birleştirilmesi için bir yöntem olarak tavsiye edilir. Bazen  $U_{ADD}$  modeli azami belirsizlik,  $U_{RSS}$  modeli olası belirsizlik olarak adlandırılır.

**Örnek 8.** Verilen parametre  $P$ 'nin biası  $B$  2 ve hesaplanmış kesinlik indeksi  $s$  1, gözlem sayısı ise 10'dur. %99 ve %95 güvenilirlik düzeyleri için belirsizlik aralığını bulunuz.

**Çözüm:** Eşitlik (26) ve  $t_{95\%,9} = 2.262$  kullanarak

$$U_{ADD} = 2 + 2.262 \cdot 1 = 4.262 \quad (\% 99 \text{ güvenilirlikle})$$

olarak bulunur. Yani %95 güvenilirlikle parametrenin en uygun değerinin  $\bar{P} \pm 4.262$  aralığının içinde bulunduğu düşünülür. Yine de  $t_{95\%,9} = 2.262$  için (27) ifadesinden

$$U_{RSS} = [2^2 + (2.262 \cdot 1)^2]^{1/2} = 3.019 \quad (\%95 \text{ güvenilirlikle})$$

yazabiliriz ve %95 'li güvenilirlik için parametrenin gerçek değerinin  $\bar{P} \pm 3.019$  aralığı içinde bulunduğu gösterilebilir.

Verilen parametrenin ölçüm sayısının az olduğu veya istatistik bilgi olmadığı durumlarda (örneğin, ölçümlerde kalibre edilmemiş cihaz kullanıldığında) (26) ve (27) ile hesaplanan belirsizlik yerine belirsizlik  $U$  tahmin edilmelidir. Bu durumda belirsizlik, ölçümlerde en iyi tahmin edilen en yüksek hata olarak ölçüm yapan kişi tarafından belirlenir. Örneğin, deneyime dayanarak ölçüm yapan kişi hiçbir özel ölçüm yapmadan,  $s$ 'nin değerini hesaplamadan ve  $t$ -istatistiği kullanmadan sıcaklık ölçümlerindeki belirsizliği  $\pm 1^\circ\text{C}$  (%95 güvenilirlikle) olarak tahmin edebilir. Veya her akış ölçümleri kalibre edilmemiş ağızlıkla yapıldığında ve

$\pm 1.5$  % (%95 güvenilirlikle) tahmin edildiğinde bunun belirsizlik olarak kabul edilebileceğini söylemek mümkündür.

### 5.5. ÖLÇÜM HATALARININ SONUCA TAŞINMASI

Çoğu kez sonuç  $r$  bir fonksiyona göre pekçok bağımsız parametre  $P_i$ 'lerin bir araya gelmesiyle oluşur. Diğer bir deyişle, sonuç  $r$  ve girdi parametreleri  $P_i$  arasında

$$r = f(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_j) \quad (28)$$

şeklinde ilişki vardır. Bu ifadede

$$\overline{P}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P_{ik} \quad (29)$$

olarak hesaplanır ve  $J$  kullanılan parametrelerin sayısını verir.

Böyle durumlarda önemli bir nokta gözden kaçırılmamalıdır; bu tek tek her ölçümdeki hatanın sonuca nasıl taşınacağıdır. Farklı bir şekilde söylersek, türemiş sonucun kesinliği ve yönlendirilmiş hatası nedir?

Bu durumda belirsizlik aralığı

$$r \pm U_r \quad (30)$$

ve ölçüm sonucunun belirsizliği (26) ve (27)'e uygun olarak

$$U_{r,ADD} = B_r + t_{95} s_r \quad (%99) \quad (31)$$

veya

$$U_{r,RSS} = [B_r^2 + (t_{95} s_r)^2]^{1/2} \quad (%95) \quad (32)$$

İstatistikte çok bilinen bir kavram sorularımızdan birine cevap verir. Bu da sonucun kesinlik indeksinin mutlak olarak,

$$s_r = \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial P_1} s_{P_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial P_2} s_{P_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial r}{\partial P_j} s_{P_j} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (33)$$

eşitliğiyle, göreceli olarak ise,

$$\frac{s_r}{r} = \left[ \sum_{i=1}^J \left( \frac{\partial r/r}{\partial P_i} \frac{s_{P_i}}{P_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (34)$$

eşitliğiyle veriliyor olmasıdır. Burada yine de karelerin toplamının kare kökü (RSS) yöntemi kullanılmıştır.

Bir önceki iki eşitlikte yer alan ve duyarlılık faktörleri adlandırılan

$$\theta_i = \frac{\partial r}{\partial P_i} \quad (35)$$

mutlak olarak, ve

$$\theta_i = \frac{\partial r/r}{\partial P_i / \bar{P}_i} \quad (36)$$

göreceli olarak hesaplanmalı ve herbir parametrenin kesinlik indeksi  $s_i$ 'nin çarpanı olarak hesaplara katılmalıdır.

Bütün parametrelerin numune büyüklükleri 30'dan fazlaysa, Tablo 1'de görüldüğü gibi  $s_r$ 'nin serbestlik derecesi  $\approx 2$ 'dir. Diğer bütün durumlar için,  $s_r$  Welch-Satterthwaite eşitliğinden [14,15] elde edilir.

$$v_r = \frac{s_r^4}{\sum_{i=1}^J \frac{(\theta_i s_{\bar{P}_i})^4}{v_{\bar{P}_i}}} = \frac{(s_r / r)^4}{\sum_{i=1}^J \frac{(\theta_i' s_{\bar{P}_i} / \bar{P}_i)^4}{v_{\bar{P}_i}}} \quad (37)$$

Burada  $v_{\bar{P}} = N-1$  'dir.

Eğer bu eşitlik tam sayı olmayan bir sonuç verirse, kendisinden önceki tam sayıya yuvarlatılmalıdır. Sonucun yönlendirmesi (33) ve (34) eşitliklerine benzer bir şekilde [16] mutlak olarak

$$B_r = \left[ \sum_{i=1}^J (\theta_i B_{\bar{P}_i})^2 \right]^{1/2} \quad (38)$$

eşitliğiyle, göreceli olarak,

$$\frac{B_r}{r} = \left[ \sum_{i=1}^J \left( \theta_i' \frac{B_{\bar{P}_i}}{\bar{P}_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (39)$$

eşitliğiyle verilir.  $B_{\bar{P}_i}$  her bir parametrenin yönlendirilmesidir.

Yönlendirme hataları ve kesinlik hataları, son sonuç elde edilinceye kadar ayrı tutulur.

**Örnek 9.** Herhangi bir ölçüm sonucu  $r$  ve  $P_i$  değişkenleri ile arasındaki bağıntı aşağıda gösterildiği gibidir:

$$r = \frac{P_1 P_2^2}{P_3^{1/2}}$$

Eşitlik (10.35) ve (10.36)'yı kullanarak

$$\theta_1 = \frac{\partial r}{\partial P_1} = \frac{P_2^2}{P_3^{1/2}}, \quad \theta_2 = \frac{\partial r}{\partial P_2} = \frac{2 P_1 P_2}{P_3^{1/2}}, \quad \theta_3 = \frac{\partial r}{\partial P_3} = -\frac{P_1 P_2^2}{2 P_3^{3/2}}$$

ve

$$\theta_1' = \frac{\partial r/r}{\partial P_1/P_1} = \frac{P_2^2}{P_3^{1/2}} = 1, \quad \theta_2' = 2, \quad \theta_3' = -\frac{1}{2}$$

Her bir parametrenin ortalama değeri, hassasiyet faktörleri, ve yönlendirmeleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Parametrenin Ortalama Değeri $\bar{P}$ , (birim)	Göreceli Hassasiyet $\theta'$ , (rakam)	Mutlak Hassasiyet $\theta$ , (birim)	Göreceli Yönlendirme $\bar{B}/\bar{P}$ , (yüzde)	Mutlak Yönlendirme $\bar{B}$ , (birim)
$\bar{P}_1 = 1$	1	5	0.5	0.005
$\bar{P}_2 = 5$	2	2	1	0.05
$\bar{P}_3 = 25$	-0.5	0.1	2	0.5
Verilen	Hesaplanan	Hesaplanan	Verilen	Hesaplanan

Eşitlik (40) kullanarak  $r = 1 \cdot 5^2 / 25^{1/2} = 5$ . Sonucun mutlak ve göreceli yönlendirme değerlerini bulunuz.

**Cözüm:** Eşitlik (38)'den

$$B_r = [(\theta_1 \bar{B}_1)^2 + (\theta_2 \bar{B}_2)^2 + (\theta_3 \bar{B}_3)^2]^{1/2} = [(5 \cdot 0.005)^2 + (2 \cdot 0.05)^2 + (0.1 \cdot 0.5)^2]^{1/2} = 0.11456$$

Eşitlik (39)'dan ise,

$$\frac{B_r}{r} = [(\theta_1 \frac{\bar{B}_1}{P_1})^2 + (\theta_2 \frac{\bar{B}_2}{P_2})^2 + (\theta_3 \frac{\bar{B}_3}{P_3})^2]^{1/2} =$$

$$= [(1 \cdot 0.5)^2 + (2 \cdot 1)^2 + (0.5 \cdot 2)^2]^{1/2} = 2.2913\% \text{ bulunur.}$$

Mantığa göre  $B_r$ 'in değeri  $B_r/r$  kullanarak hesaplanabilir.

$$B_r = \frac{B_r}{r} r = 0.022913 \cdot 5 = 0.11456$$

Genelde böyle birimlerin göreceli olarak ifade edilmesi daha kolay olduğu için toplam belirsizlik değeri sık sık kontrolle belirlenebilir.

**Örnek 10.** 9.örnekteki sonuç  $r$  ve  $P_i$  parametreleri arasındaki ifadeyi, tabloda verilen değerleri ve aşağıda yer alan bilgileri kullanarak sonucun mutlak ve göreceli hatanın kesinlik değerlerini bulunuz.

Parametre	Ölçüm Sayısı N (rakam)	Göreceli Kesinlik İndeksi $\frac{\bar{s}}{P}$ , (yüzde)	Mutlak kesinlik İndeksi $\bar{s}$ , (birim)
1	20	0.5	0.005
2	10	0.2	0.010
3	5	0.1	0.025
	Verilen	Verilen	Hesaplanan

**Çözüm:** Eşitlik (33)'den,

$$s_r = [(\theta_1 \bar{s}_1)^2 + (\theta_2 \bar{s}_2)^2 + (\theta_3 \bar{s}_3)^2]^{1/2} = [(5 \cdot 0.005)^2 + (2 \cdot 0.01)^2 + (0.1 \cdot 0.025)^2]^{1/2} = 0.03211$$

Eşitlik (34)'den ise,

$$\frac{s_r}{r} = [(\theta_1 \frac{\bar{s}_1}{P_1})^2 + (\theta_2 \frac{\bar{s}_2}{P_2})^2 + (\theta_3 \frac{\bar{s}_3}{P_3})^2]^{1/2} =$$

$$= [(1 \cdot 0.5)^2 + (2 \cdot 0.2)^2 + (0.5 \cdot 0.1)^2]^{1/2} = 0.64226\%$$

Buradan  $s_r/r$ 'in değeri kullanılarak  $s_r$  hesaplanabilir.

$$s_r = \frac{s_r}{r} r = 0.0064226 \cdot 5 = 0.03211$$

Ölçüm sonucunun hatasının kesinliğinin (yani  $t_{95} s_r$ ) bulunması için ilk olarak serbestlik derecelerinin sayısının eşitlik (37)'ye dayanarak hesaplanması gerekir:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{s_r^4}{\frac{(\theta_1 \bar{s}_1)^4}{N_1 - 1} + \frac{(\theta_2 \bar{s}_2)^4}{N_2 - 1} + \frac{(\theta_3 \bar{s}_3)^4}{N_3 - 1}} = \frac{(s_r/r)^4}{\frac{(\theta_1 \bar{s}_1 / P_1)^4}{N_1 - 1} + \frac{(\theta_2 \bar{s}_2 / P_2)^4}{N_2 - 1} + \frac{(\theta_3 \bar{s}_3 / P_3)^4}{N_3 - 1}} = \\ &= \frac{0.03211^4}{\frac{(5 \cdot 0.005)^4}{19} + \frac{(2 \cdot 0.01)^4}{9} + \frac{(0.1 \cdot 0.025)^4}{4}} = \frac{0.0064226^4}{\frac{(1 \cdot 0.005)^4}{19} + \frac{(2 \cdot 0.002)^4}{9} + \frac{(0.5 \cdot 0.001)^4}{4}} = 27.7 \end{aligned}$$

veya tam sayıya yuvarlayarak,  $v_r = 27$  bulunur.

Tablo 1'e göre sonuç  $t_{95,27}=2.052$  için ve hatanın kesinliği  $PE$  (bu terimde istatistikte sık sık kullanılır) mutlak olarak ifade edilmiş sonucu

$$PE_r = t_{95,27} s_r = 2.052 \cdot 0.03211 = 0.06589$$

olarak elde edilir.

Göreceli olarak ise,

$$\frac{PE_r}{r} = t_{95,27} \frac{s_r}{r} = 2.052 \cdot 0.64226 = 1.3179\%$$

**Örnek 11.** Sonuç  $r$ 'nin değeri 9.örnekteki ilişkiyle üç ölçüm parametresi ile belirlenebildiğinde ve sistematik ve rasgele hatalar örnek 9 ve 10'daki gibi verildiğinde, sonucunun olası, mutlak ve göreceli belirsizlik değerlerini bulunuz.

**Çözüm:** Eşitlik (31)'den mutlak belirsizlik değeri için,

$$U_{r,ADD} = U_{r,max} = B_r + t_{95} s_r \quad \%99\text{'lu güvenilirlikle}$$

$$U_{r,max} = 0.11456 + 0.06589 = 0.18045$$

Eşitlik (32)'den

$$U_{r,RSS} = U_{r,olası} = [B_r^2 + (t_{95} s_r)^2]^{1/2} \quad \%95\text{'li güvenilirlikle}$$

$$U_{r,olası} = [(0.11456)^2 + (0.06589)^2]^{1/2} = 0.13216$$

Göreceli belirsizlik ise;

$$\frac{U_{r,max}}{r} = \frac{B_r}{r} + \frac{t_{95} s_r}{r} = 2.2913 + 1.3179 = 3.61\%$$

$$\frac{U_{r,olası}}{r} = \left[ \left( \frac{B_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{t_{95} s_r}{r} \right)^2 \right]^{1/2} = 2.64\%$$

Mantığa göre,

$$U_{r,max} = \frac{U_{r,max}}{r} r = 0.0361 \cdot 5 = 0.1805$$

ve

$$U_{r,olası} = \frac{U_{r,olası}}{r} r = 0.0264 \cdot 5 = 0.132$$

## 6. STANDART BELİRSİZLİĞİN HESAPLANMASI

### 6.1. ÖLÇÜMÜN MODELLENMESİ

Daha önce söylendiği gibi pek çok durumda ölçülen nicelik  $Y$  doğrudan ölçülmez fakat  $N$  tane  $X_1, X_2, \dots, X_N$  gibi başka nicelikten  $f$  fonksiyonu ile verilen bağıntıyla elde edilir.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (40)$$

**Örnek 12:** Belli bir  $t_0$  sıcaklığında direnci  $R_0$  olan ve direnç değeri sıcaklığa bağlı olarak  $\alpha$  katsayısıyla lineer değişen direncin iki ucuna potansiyel farkı  $V$  uygulandığında,  $t$  sıcaklığında direnç üzerindeki  $P$  gücü  $V, R_0, \alpha$  ve  $t$  değerleri kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0 [1 + \alpha(t-t_0)]$$

Eğer  $P$  farklı bir yöntemle ölçülürse farklı bir eşitlikle modellenmesi gerekir.

Girdi nicelikler  $X_1, X_2, \dots, X_N$  tanımlanmış nicelik olabilir veya başka nicelikler ve sistematik etkenler için düzeltmeler ve düzeltme faktörleri içerebilir. Bu nedenle fonksiyonel ilişki çok karmaşık bir hale gelip, böyle bir  $f$  fonksiyonu yazmak bile olanaksızlaşabilir.

Girdi nicelikler seti  $X_1, X_2, \dots, X_N$  şu şekilde sınıflandırılabilir:

Yapılan ölçümde, değerleri ve belirsizlikleri doğrudan belirlenebilen nicelikler. Bu değerler ve belirsizlikler, tek bir gözlem sonucu, tekrarlanan gözlemler sonucu, veya belli bir deneyim sonucunda karar vererek elde edilebilir. Bu sonuçlar cihazlardan okunan değerlere ve ortam sıcaklığı, basınç, nem gibi sonucu yönlendiren etkenlere göre düzeltmeler içerebilir.

Değerleri ve belirsizlikleri dış kaynaklardan alınan nicelikler.

Kalibre edilmiş ölçüm standartları, sertifikalandırılmış referans malzemeler veya el kitaplarından alınmış referans veriler gibidir.

Ölçülen nicelik  $Y$  için kestirilen\* (estimated)  $y$  değerleri,  $X_1, X_2, \dots, X_N$  için kestirilen girdi değerleri  $x_1, x_2, \dots, x_N$  kullanılarak bulunur

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (41)$$

Bazı durumlarda  $y$ ,

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

eşitliğinden elde edilir.

\* Burada kestirilen sözcüğü İngilizcedeki **estimated** karşılığında kullanılmıştır. Ölçülen nicelik  $Y$  için, elimizdeki bütün olanakları kullanarak ulaşabildiğimiz yargıdır.

Böylece  $y$ ,  $n$  tane bağımsız  $Y_k$  gözleminin sonunda aritmetik ortalama olarak bulunur. Herbir  $Y_k$  aynı belirsizliğe sahip ve aynı zamanda elde edilen  $N$  tane  $X_i$  gözlemin sonunda bulunmuştur.

$\bar{X}_i = (\sum_{k=1}^n X_{i,k})/n$  olduğu  $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$  yerine bu şekilde aritmetik ortalama almak,  $f$  fonksiyonu girdi değerleri  $X_{i,k}$ 'in lineer olmayan fonksiyonuysa tercih edilir, fakat ikinci yaklaşımda lineer fonksiyondur.

Ölçüm sonucunda elde edilen ve  $y$  ile gösterilen değer,  $u_c(y)$  olarak gösterilen ve bileşik standart belirsizlik olarak adlandırılan değeri, herbir  $x_i$  değerine ait standart belirsizlik  $u(x_i)$  değerlerinin bileşiminden elde edilir.  $x_i$  ve  $u(x_i)$  değerleri  $X_i$  niceliklerinin olası dağılımından elde edilir.

Bu olası dağılım,  $X_i$  niceliğinin  $X_{i,k}$  olarak ortaya çıkan seri gözlemleri sonucu (sıklığa bağlı) oluşan veya daha önce oluşmuş bir dağılım olabilir. Standart belirsizliğin bileşenlerinin A-tipi hesaplanması sıklık dağılımlarında yapılırken, B-tipi hesaplanması daha önce bir şekilde oluşmuş dağılımlar için yapılır.

*Unutulmamalıdır ki her iki durum da bizim bu konudaki bilgi derecemiz kadar oluşturabildiğimiz modellerdir.*

## 6.2. STANDART BELİRSİZLİĞİN A-TİPİ HESAPLANMASI

Çoğu kez rasgele değişken  $q$  için  $n$  tane bağımsız gözlem sonucunda aynı gözlem koşullarında elde edilen en iyi kestirim,  $n$  tane gözlemin aritmetik ortalamasıdır.

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$$

Böylece girdi nicelik  $X_i$  için,  $X_{i,k}$  gibi  $n$  tane bağımsız gözlem yapıldığında  $X_i$  için elde edilen ortalama  $x_i = \bar{X}_i$  ölçüm sonucu  $y$  'i elde etmek için girdi değeri olarak kullanılır.

Herbir gözlem  $q_k$ , ortam koşullarındaki rasgele değişimlerden ve etki faktörlerinin rasgele değişimlerinden dolayı farklılıklar gösterir. Burada önemle vurguladığımız nokta şudur: Metrolojide kesinlik indeksi, hata kesinliği gibi terimlerden tamamen vazgeçilmiş, varyans ve sapma belirsizlik hesaplarında kullanılan terimler olmuştur. Örneğin, girdi büyüklüğündeki rasgele hatalardan doğan belirsizliğin tanımlanması için deneysel standart sapma kullanılır.

Gözlemlerin deneysel varyansının değeri, bu aynı zamanda  $q$  için olasılık dağılımının varyansı  $\sigma^2$ 'dir, aşağıdaki eşitlikle belirlenir.

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad (42)$$

Varyansın bu kestirimi ve deneysel standart sapma olarak adlandırılan onun pozitif kare kökü, gözlemlenen değerlerin farklılığını belirtir veya daha genel olarak onların ortalamadan sapmalarını karakterize eder. Diğer bir deyişle deneysel varyans tüm gözlem sonuçlarının dağılımına ait bir değerdir.

Gözlemler ortalamasının varyansının en iyi kestirimi ise,

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (43)$$

eşitliğiyle verilir. Ortalamanın deneysel varyansı  $s^2(\bar{q})$  ve onun pozitif kare köküne eşit olan ortalamanın deneysel standart sapması  $s(\bar{q})$ ,  $q$  değerinin beklenen değer  $\mu_q$ 'u ne derece temsil ettiğinin ölçüsüdür ve her ikisi de  $q$ 'nın içerdiği belirsizliği ölçmek için kullanılır.

Böylece  $n$  kere tekrarlanan bağımsız  $X_{ik}$  gözlemler sonucunda elde edilen, girdi değeri  $X_i$  için kestirilen değer,  $x_i = \bar{X}_i$  için standart belirsizlik  $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ ,  $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$  olarak verilir.

Kolaylık için, A-tipi varyans veya A-tipi standart belirsizlik olarak adlandırılır. Ancak böyle terimlerin kullanılmasından kaçınılmalıdır. Belirsizliğin ve onun hesaplanması için kullanılan varyansların A-tipi veya B-tipi değil, sadece varyansların belirlenmesi için kullanılan belirsizlik hesaplama yöntemlerinin A-tipi (tekrarlanan ölçüm sonuçlarına dayanan istatistik yöntem) veya B-tipi (istatistik olmayan yöntem) olduğunu söyleyebiliriz.

Notlar:

1.  $n$  tane gözlemin sonucunun güvenilir bir kestiriminin  $\bar{q}$  olabilmesi için gözlem sayısının yeterince büyük olması gerekir. Eğer  $q$  normal dağılıma sahip değilse bu fark t-dağılımı olarak ele alınır.  $\sigma^2$  ölçüm sayısının sonsuz olduğu halde normal dağılıma sahip bir değişkenin standart sapmasıdır. Bu yüzden deneysel standart sapma ile standart sapma arasındaki fark oldukça küçük olması için ölçüm sayısı büyük olmalıdır. Örneğin, ölçüm sayısı 10'dan küçük ise elde edilen deneysel standart sapma  $t$ -faktör adlandırılan değeri ile çarpılmalıdır [17]. Bu işlemler,  $s^2(\bar{q})$  ile  $\sigma^2(\bar{q})$  arasındaki farkın belirlenmesi, güvenilirlik aralığı belirtilmesinde çok önemlidir.

2.  $s^2(\bar{q})$  daha temel bir değer olmasına rağmen kolay olduğu için  $s(\bar{q})$  kullanılır (özellikle  $s(\bar{q})$ 'nin girdi büyüklükleri ile aynı birim cinsinden ifade edilmesi açısından)

### 6.3. STANDART BELİRSİZLİĞİN B-TİPİ HESAPLANMASI

Girdi değeri  $X_i$  için kestirilen değer olan  $x_i$  tekrarlanmış ölçümler sonucunda elde edilmemişse, kestirilmiş varyans  $u^2(x_i)$  veya standart belirsizlik  $u(x_i)$ ,  $X_i$ 'in olabilecek bütün farklı değerleri göz önüne alınarak bütün elde olan bilgiler kullanılarak bilimsel bir şekilde yargıya varılır. Eldeki bilgiler

- Daha önce yapılan bir ölçümde elde edilen veriler
- İlgili malzemeler ve kullanılan cihazlar konusundaki deneyim ve daha önce edinilmiş bilgiler.
- Yapımcının belirttiği özellikler
- Kalibrasyon ve diğer sertifikalarda bulunan veriler
- El kitaplarından alınan referans verilere ilişkin belirsizliklerdir.

Bu şekilde hesaplanan  $u^2(x_i)$  ve  $u(x_i)$  bazen kolaylık açısından B-tipi varyans ve B-tipi standart belirsizlik olarak adlandırılır.

Eğer kestirim  $x_i$  başka bir kaynaktan alınmışsa, ve bu kaynaktan belirsizlik standart sapmanın belli bir çarpanı olarak veriliyorsa, standart belirsizlik  $u(x_i)$  basitçe; söylenen değer bu çarpana bölümü, kestirilen varyans  $u^2(x_i)$  ise bölme işlemi sonucunda elde edilen değer karesidir.

**Örnek 13:** Eğer kalibrasyon sertifikasında bir kütle  $m_s=1\ 000,000\ 325\ \text{g}$  olarak ve belirsizlik de üç standart sapma seviyesinde  $240\ \mu\text{g}$  olarak veriliyorsa, bu kütlenin standart belirsizliği  $u(m_s)=240/3=80\ \mu\text{g}$ 'dır. Göreceli standart belirsizlik ise  $u(m_s)/m_s=80 \cdot 10^{-9}$  dur ve aynı zamanda varyans  $u^2(m_s)=(80\ \mu\text{g})^2=6.4 \cdot 10^{-9}\ \text{g}^2$ 'dir.

**Örnek 14:** Eğer kalibrasyon sertifikasında standart rezistans  $R_s=10,000\ 742\ \Omega \mp 129\ \mu\Omega$  olarak verilmiş ve belirsizliğin % 99 güvenilirlik düzeyiyle  $129\ \mu\Omega$  olduğu belirtilmişse,  $u(R_s)=129/2.58=50\ \mu\Omega$ 'dur. Göreceli standart belirsizlik ise  $5 \cdot 10^{-6}$ 'dır ve varyans  $u^2(R_s)=(50\ \mu\Omega)^2=2.5 \cdot 10^{-9}\ \Omega^2$ 'dir.

Herhangi bir kaynakta belirtilen belirsizlik  $x_i$  yüzde 90, 95, 99 güvenilirlik seviyesiyle verilebilir. Farklı bir şekilde belirtilmemişse bu durumda normal dağılım kabul edilerek, %90, 95 ve 99 güvenilirlik seviyesine karşılık gelen faktörler 1.64; 1.96 ve 2.58'dir.  $x_i$  için standart belirsizlik verilen belirsizlik verilen güvenilirlik seviyesine uygun faktöre bölünerek elde edilir.

Bazı durumlarda ise yüzde 50 yüzde 50 şansla girdi değeri  $X_i$   $a_-$  ve  $a_+$  aralığında olduğu söylenebilir. Eğer  $X_i$  değerlerinin dağılımının normal dağılım olduğu kabul edilirse, en iyi kestirim  $x_i$  bu iki noktanın ortasında olduğu kabul edilir.  $a=(a_-+a_+)/2$  ve  $u(x_i)=1.48a$ 'dır çünkü % 50 güvenilirlik seviyesinde faktör 1.48'dir.

Bir önceki örnekte şans % 50-% 50 değil de üçte iki olsaydı,  $u(x_i)=a$  alabilirdik çünkü beklenen değeri  $\mu$  ve standart sapması  $\sigma$  olan normal dağılımda  $\mu \pm \sigma$  normal dağılımın 68.3'unu kapsar.

Sistematik hatalarla ilgili bazen herhangi bir dış etkenden dolayı sadece  $X_i$  için en alt ve en üst değerler verilir. O zaman bu limitler içinde olasılığın bir, dışında ise sıfır olduğunu kabul edebiliriz (dikdörtgen dağılım). Bu durumda  $x_i$  için en uygun değer

$$x_i = \frac{1}{2} (a_- + a_+) \quad (44)$$

olarak ve bu değere ait varyans da

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12} (a_+ - a_-)^2 \quad (45)$$

olarak verilir.

Verilen sınırlar içinde girdi değerlerinin simetrik olmadığı durumlarda farklı dağılımlar farklı sonuçlar verir. Eğer uygun bir dağılım seçmek için yeterli bilgi yoksa, bir önceki gibi  $u^2(x_i)=(a_+-a_-)^2/12$  alınabilir.

Gerçek yaşamda dikdörtgen dağılım elde edilmez bunun yerine, orta noktalarda yoğunlaşıp, kenarlarda azalan bir dağılım daha gerçekçi bir yaklaşım olur. Bu şekilde iki tarafta aynı eğime sahip taban genişliği  $(a_+-a_-)=2a$  ve tepe genişliği  $2a\beta$  olan ( $0 \leq \beta \leq 1$ ) trapezoidal dağılım alınırsa,  $X_i$ 'nin kestirilen değeri  $x_i=(a_++a_-)/2$  ve varyans  $u^2(x_i)=a^2(1+\beta^2)/6$  olarak verilir. Üçgen dağılım için,  $u^2(x_i)=a^2/6$ 'dır.

Belirsizlik bileşenlerini iki kere ele almaktan da sakınmak çok önemlidir. Eğer belli bir etkenden gelen belirsizlik B-tipi olarak ele alınmışsa, toplam belirsizliğe bağımsız bir terim olarak katılmalıdır.

## 7. BİLEŞİK BELİRSİZLİĞİN HESAPLANMASI

### 7.1 BİRBİRLERİNDEN BAĞIMSIZ GİRDİ BÜYÜKLÜKLERİ

Bu bölümde girdi büyüklüklerinin tümünün bağımsız olduğu durum incelenecektir. İki veya daha fazla girdi büyüklükleri arasında ilişki olduğu durum daha sonra anlatılacaktır.

Ölçüm sonucu  $y$ 'nin standart belirsizliği,  $y$  ölçülebilir büyüklük  $Y$ 'nin kestirilen değeri iken girdi büyüklükleri kestirilen değerlerini  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  standart belirsizliklerinin uygun bir kombinasyonu halinde elde edilmektedir. Bu yöntemle belirlenen belirsizlik bileşik standart belirsizlik olarak adlandırılır ve  $u_c(y)$  olarak işaretlenir.

Bileşik standart belirsizlik aşağıdaki ifadeyle hesaplanan bileşik standart varyansın pozitif karekökü olarak tanımlanır.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (46)$$

Buradaki  $f$  fonksiyonu daha önce (40)'da ölçüm modelini belirleyen fonksiyondur.  $u(x_i)$  değerlerinin herbiri 6.2 (A-tip yöntem) veya 6.3 (B-tip yöntem)'de gösterilen bir şekilde hesaplanır.  $u_c(y)$  bileşik standart belirsizlik olarak kabul edilir ve ölçülen büyüklük  $Y$  ile ilintili kestirilen  $y$  değerlerinin dağılımını sergiler.

İfade (46) ve daha sonra verilecek olan (birbirlerine bağımlı büyüklükler için) (50)  $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  fonksiyonunun Taylor serisi açımına dayanır ve genellikle belirsizliğin yayılması kanunu olarak adlandırılır.

Bazı durumlarda,  $f$  fonksiyonu non-lineer olduğunda,  $u_c^2(y)$ 'nin belirlenmesi için, Taylor serisi açımının daha yüksek dereceli bileşenleri dikkate alınmalıdır.

Birinci dereceli bileşenler  $f$  lineer fonksiyon olduğu halde  $u_c^2(y)$ 'nin bileşenlerini ideal olarak tanımlar. Örneğin, herbir  $X_i$  kendi ortalama değeri etrafında simetrik ise, (46)'da dikkate alınacak daha yüksek bir bileşen

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] \times u^2(x_i) u^2(x_j)$$

kabul edilir.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  kısmi türevler  $X_i = x_i$  değerinde hesaplanan  $\frac{\partial f}{\partial X_i}$  türevlere eşittir. Bu türevler genellikle duyarlılık

katsayıları olarak adlandırılır ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerinin değişiminin kestirilen değer  $y$ 'yi nasıl etkilediğini gösterir. Bölüm 5.5'te gördüğümüz gibi istatistikte bu türevler duyarlılık faktörleri olarak adlandırılır. Pratikte, girdi büyüklüklerinin küçük değişimi  $\Delta x_i$  ile  $y$ 'nin değerinde meydana gelen değişim aşağıdaki ifade ile verilir.

$$(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Eğer bu değişimin nedeni  $x_i$ 'lerin standart belirsizlikleri ise buna uygun  $y$ 'deki değişim  $(\partial f / \partial x_i) u(x_i)$  olacaktır. Böylece bileşik varyans  $u_c^2(y)$  herbir girdi büyüklüğün varyansını içeren bileşenlerin toplamı olarak kabul edilir.

Bu durumda,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (47a)$$

Bu ifadede

$$c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \quad (47b)$$

Notlar:

1. Genellikle  $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$  kısmi türevleri  $X_i$ 'nin beklenen değeri için hesaplanmalıdır. Ancak pratikte kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$$

ifadesi ile hesaplanır.

2. Bileşik standart belirsizlik  $u_c(y)$  (47a)'daki  $c_i u(x_i)$  yerine;

$$Z_i = \frac{1}{2} [f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N)]$$

kullanılırken de sayısal olarak elde edilir. Diğer bir deyişle,  $u_i(y)$ ,  $y$ 'nin  $x_i$ 'deki  $+u(x_i)$  ve  $-u(x_i)$  kadar değişiminden meydana gelen değişimdir.  $u_i(y)$ 'nin değeri bu durumda  $|Z_i|$  olarak verilebilir ve buna uygun duyarlılık katsayısı  $c_i = Z_i / u(x_i)$  'dir.

**Örnek 15:** Örnek 12 için duyarlılık katsayılarını ve bileşik standart belirsizliği hesaplayalım.

Ölçümlerde kullanılan fonksiyon

$$P = F(V, R_o, \alpha, t) = \frac{V^2}{R_o [1 + \alpha(t - t_o)]}$$

İfade (47b)'ye göre

$$C_1 \equiv \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R_o [1 + \alpha(t - t_o)]} = \frac{2V}{V} \frac{V^2}{R_o [1 + \alpha(t - t_o)]} = \frac{2P}{V}$$

$$C_2 \equiv \frac{\partial P}{\partial R_o} = -\frac{V^2}{R_o^2[1+\alpha(t-t_o)]} = -\frac{1}{R_o} \frac{V^2}{R_o[1+\alpha(t-t_o)]} = -\frac{P}{R_o}$$

$$C_3 \equiv \frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{V^2(t-t_o)}{R_o[1+\alpha(t-t_o)]^2} = -\frac{t-t_o}{1+\alpha(t-t_o)} \frac{V^2}{R_o[1+\alpha(t-t_o)]} = -\frac{P(t-t_o)}{1+\alpha(t-t_o)}$$

$$C_4 \equiv \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\alpha V^2}{R_o[1+\alpha(t-t_o)]^2} = -\frac{\alpha}{1+\alpha(t-t_o)} \frac{V^2}{R_o[1+\alpha(t-t_o)]} = -\frac{\alpha P}{1+\alpha(t-t_o)}$$

Elde edilen duyarlılık katsayılarını kullanarak

$$\begin{aligned} u_2(P) &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_o}\right)^2 u^2(R_o) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t) = \\ &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_o)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\ &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P) \end{aligned}$$

Bazen hassasiyet katsayıları  $\partial f/\partial x_i$  girdi büyüklükleri ve ölçülecek büyüklük arasındaki  $f$  fonksiyonunu kullanmadan deneysel olarak belirlenebilir.

Bu yöntem kullanıldığında  $X_i$ 'nin değerini değiştirerek  $Y$ 'deki değişim kaydedilir. Bu arada diğer  $X$ 'ler ise sabit tutulur. Böylece bulunan hassasiyet katsayısının Taylor seri açılımının birinci dereceli bileşenlerine eşit olacağı açıktır.

**Örnek 16:** Gerilim ölçümlerinde ölçülebilir büyüklük  $V = \bar{V} + \Delta \bar{V}$  ifadesi ile belirlenir. Burada  $\bar{V} = 0.928571 V$ ,  $u(\bar{V}) = 12 \mu V$  ve eklenen düzeltme faktörü için  $\Delta \bar{V} = 0$ ,  $u(\Delta \bar{V}) = 8.7 \mu V$  olduğunu kabul ederek, bileşik standart belirsizliği hesaplayalım.

Duyarlılık katsayıları için

$$C_1 \equiv \frac{\partial V}{\partial \bar{V}} = 1 \quad \text{ve} \quad C_2 \equiv \frac{\partial V}{\partial (\Delta \bar{V})} = 1$$

ifadeleri geçerlidir. Böylece  $V$ 'nin bileşik standart varyansı

$$u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta \bar{V}) = (12 \mu V)^2 + (8.7 \mu V)^2 = 219 \times 10^{-12} V^2$$

ifadesi ile hesaplanır ve buna karşılık gelen bileşik standart belirsizlik  $u_c(V) = 15 \mu V$  veya göreceli olarak

$$\frac{u_c(V)}{V} = \frac{15 \mu V}{0.928571 V} = 16 \times 10^{-6}$$

Bu örnekte görüldüğü gibi , eğer ölçülen büyüklüğü ile girdi büyüklükleri arasında lineer bir bağıntı varsa, yani  $Y=c_1X_1+c_2X_2+\dots+c_NX_N$  ve sabitler  $c_i=+1$  veya  $-1$  ise, ölçülen büyüklük  $Y$ 'nin kestirilen değerinin bileşik varyansı

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u^2(x_i) \quad (48)$$

Eğer ölçülen büyüklük ile girdi büyüklükler arasında polinom şeklinde bir ilişki varsa,

$$Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N}$$

ve  $p_i$ 'ler bilinen pozitif veya negatif sayılar olarak çok küçük belirsizliklere sahipse,  $Y$ 'nin bileşik varyansı ifade (46)'a uygun olarak

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2 \quad (49)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda yazılan ifade (47a)'nın benzeri olup bileşik standart varyans  $u_c(y)^2$ 'nin yerine göreceli bileşik varyans  $[u_c(y)/y]^2$  için yazılmıştır.

## 7.2. BİRBİRLERİNE BAĞIMLI GİRDİ BÜYÜKLÜKLERİ

Bileşik belirsizlik hesapları için kullanılan (47)-(49) ifadeler sadece girdi parametreleri  $X_i$  arasında herhangi bir ilişki yoksa geçerlidir. Girdi büyüklüklerinin birbirlerinden bağımsız ele alınmadığı durumlarda, bileşik belirsizlik  $u_c(y)$ 'nin hesaplama yöntemi farklıdır.

$X_i$  ve  $X_j$  girdi büyüklükleri arasında fonksiyon şeklinde bir ilişki varsa, ölçüm sonuçlarının bileşik varyansı  $u_c^2(y)$ 'nin hesapları için uygun ifade aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (50)$$

Bu ifadede  $x_i$  ve  $x_j$  girdi büyüklükleri  $X_i$  ve  $X_j$ 'lerin kestirilen değerleridir,  $u(x_i, x_j)=u(x_i, x_j)$   $x_i$  ve  $x_j$ 'lerin kestirilen kovaryanslarıdır.  $x_i$  ve  $x_j$  arasındaki ilişki (korelasyon) derecesi korelasyon katsayısı ile belirlenir

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (51)$$

Burada  $r(x_i, x_j)=r(x_j, x_i)$  ve genel olarak  $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$ 'dir. Eğer  $x_i$  ve  $x_j$  aralarında hiçbir ilişki yoksa  $r(x_i, x_j)=0$ .

Korelasyon katsayısı  $r(x_j, x_i)$ 'i dikkate alarak eşitlik (50)'nin kovaryanslı kısmı şöyle yazılabilir:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (52)$$

Bu halde bileşik belirsizlik hesapları için son ifade

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (53)$$

olarak yazılabilir.

Tüm girdi büyüklükleri arasında korelasyon katsayısı  $r(x_j, x_i) = +1$  ile bir fonksiyonel ilişki varsa, eşitlik (53) çok basit bir şekile indirgemiş olacaktır.

$$u_c^2(y) = \left[ \sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right]^2 = \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 \quad (54)$$

Yukarıdaki ifadeden görüldüğü gibi, böyle durumlarda bileşik belirsizlik herbir girdi büyüklüğün kestirilen değeri  $x_i$ 'lerin belirsizliklerden meydana gelen  $y$ 'deki değişimlerin toplamının karesidir.

Pratikte, birçok ölçümlerdeki girdi büyüklükleri arasında ilişki vardır. Bunun nedenleri olarak aynı ölçüm standartlarının, referans verilerin kullanılması gösterilebilir.

İki girdi büyüklükleri  $X_1$  ve  $X_2$ 'nin kestirilen değerleri  $x_1$  ve  $x_2$ 'lerin bağımsız  $Q_1, Q_2, \dots, Q_L$  parametreleriyle

$$X_1 = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$$

$$X_2 = G(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$$

şeklinde bir ilişki olduğunu farzedelim.  $u^2(q_i)$   $Q_L$ 'lerin kestirilen değeri  $q_i$ 'in varyansların olduğunu kabul edersek, eşitlik (46)'ya göre

$$u^2(x_1) = \sum_{i=1}^L \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)^2 u^2(q_i) \quad (55)$$

$$u^2(x_2) = \sum_{i=1}^L \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)^2 u^2(q_i) \quad (56)$$

olarak yazabiliriz.  $x_1$  ve  $x_2$ 'ye ait olan tahmini kovaryans ise aşağıdaki ifadeyle belirlenir:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^L \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (57)$$

Belli bir  $l$  için  $\frac{\partial F}{\partial q_l} \neq 0$  ve  $\frac{\partial G}{\partial q_l} \neq 0$  ise, bu terimler (57)'deki  $u(x_1, x_2)$ 'ye katkıda bulunacaklardır.

(55)-(57) kullanılarak korelasyon katsayısı da hesaplanabilir.

**Örnek 17.** Standart direnç  $R_s$  hem akım  $I$ , hem de sıcaklık  $t$  ölçümlerinde kullanılır. Akım, dijital voltmetreyle standart direncin terminalleri arasındaki potansiyel farkı ölçülerek belirlenir. Sıcaklık ölçümleri ise direnç köprüsü ve standart dirençle gerçekleştirilir. Örnek olarak, sıcaklık sensörünün rezistansının  $15^\circ\text{C}$  ile  $30^\circ\text{C}$  sıcaklık bölgesinde sıcaklıkla  $t = aR^2(t) - t_0$  şeklinde bir bağıntı varsa. Son ifadede  $a$  ve  $t_0$  bilinen sabitlerdir. Böylece akım

$$I = \frac{V_s}{R_s} \quad (58)$$

sıcaklık ise

$$t = a \beta^2(t) R_s^2 - t_0 \quad (59)$$

formülleriyle belirlenir. Yukarıdaki ifadede  $\beta(t) = R_s(t)/R_s$  köprüyle ölçülen orandır. Akım ve sıcaklık ölçümlerinde  $R_s$  değerinin kullanıldığından, (57)'e uygun olarak  $I$  ve  $t$ 'nin kovaryansı için aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$u(I, t) = \frac{\partial I}{\partial R_s} \frac{\partial t}{\partial R_s} u^2(R_s) = \left( -\frac{V_s}{R_s^2} \right) (2a\beta^2(t)R_s) u^2(R_s) = -\frac{2I(t+t_0)}{R_s^2} u^2(R_s) \quad (60)$$

Bu kovaryansın rakamsal değerinin elde etmek için,  $I$ ,  $t$  ölçülen ve  $R_s$  ile  $u(R_s)$  standart direncin kalibrasyon sertifikasında belirlenen değerlerini (60)'ta kullanmalıyız.  $u(I, t)$ 'nin birimi  $\text{A} \cdot ^\circ\text{C}$ 'dir.

Diğer bir  $P$  büyüklüğü için  $I$  ve  $t$ 'nin

$$P = \frac{C_0 I^2}{T_0 + t} \quad (61)$$

formülüyle girdi büyüklükleri olduğunun farzedelim. Burada  $C_0$  ve  $T_0$  bilinen sabitlerdir ve bunlara ait standart varyansların ( $u^2(C_0)$ ,  $u^2(T_0)$ ) çok küçük olduğunu varsayalım.  $P$ 'nin göreceli varyansını,  $I$  ve  $t$ 'nin varyansını ve onların eşitlik (60) ile belirlenen kovaryansını kullanarak (50)'ye göre hesaplırsak,

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4 \frac{u^2(I)}{I^2} - 4 \frac{u(I, t)}{I(T_0 + t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0 + t)^2} \quad (62)$$

sonucunu elde etmiş olacağız. Son ifadedeki  $u^2(I)$  ve  $u^2(t)$  varyansları (46), (58) ve (59) eşitliklerini kullanarak belirlenir.

$$\frac{u^2(I)}{I^2} = \frac{u^2(V_s)}{V_s^2} + \frac{u^2(R_s)}{R_s^2} \quad (63)$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2 \frac{u^2(\beta)}{\beta^2} + 4(t+t_0)^2 \frac{u^2(R_s)}{R_s^2} \quad (64)$$

Son ifadede  $t_0$  ve  $a$ 'ların belirsizliklerinin çok küçük olduğu kabul edilmiştir.  $P$ 'nin bileşik belirsizlik hesaplarını tamamlamak için tekrarlanan ölçümlerden  $u^2(V_j)$  ve  $u^2(\beta)$  değerleri belirlenmelidir. Tabii ki, bu aşamada ölçüm cihazlarından kaynaklanan diğer belirsizlik kaynakları da dikkate alınmalıdır.

## 8. GENİŞLETİLMİŞ BELİRSİZLİĞİN BELİRLENMESİ

Bileşik belirsizlik  $u_c(y)$  evrensel olarak ölçümlerdeki belirsizliği tanımlanmasına rağmen, bu değer ölçülen büyüklüğün dağılımını gösterdiğinde güvenilirlik düzeyi sadece %68.27'dir. Diğer bir deyişle, aynı büyüklük herhangi bir şartlar altında ölçülürse sonuç %68.27'lik olasılıkla  $u_c(y)$  ile belirlenen aralıkta olacaktır. Pratikte ise, endüstriyel uygulamalarda daha yüksek güvenilirlik düzeylerine gereksinim vardır. Bu durumlarda ölçümlerdeki belirsizliği tanımlamak için genişletilmiş belirsizlik adlandırılan diğer bir terim kullanılır. Genişletilmiş belirsizlik  $U$  bileşik standart belirsizlik  $u_c(y)$  ile kapsam faktörü  $k$  ile çarpımı sonucunda elde edilir.

$$U = k u_c(y) \quad (65)$$

Bu durumda ölçüm sonucu  $Y = y \pm U$  olarak verilebilir ve ölçülen değer  $Y$ 'nin en uygun değerinin daha yüksek bir güvenilirlik düzeyiyle  $y - U$  ile  $y + U$  aralığında bulunduğu söylenilebilir. Bazen bu aralık

$$y - U \leq Y \leq y + U \quad (66)$$

olarak da verilir.

Güvenilirlik aralığı ve güvenilirlik düzeyi istatistik terimleri olup belli koşullar sağlandığında ve bileşik belirsizliği oluşturan tüm bileşenleri A-yöntemiyle hesaplanığında kullanılabilir. Bu çalışmada, CIPM önerilerine uygun olarak çok daha özel bir anlam taşıyarak  $U$  ölçüm sonuçlarının dağılımının  $p$  kısmını kapsayan aralığı belirlemektedir. Buna göre bazen  $p$  kapsam olasılığı olarak adlandırılır.

(64)'teki kapsam faktörünün değeri genel olarak 2 ile 3 arasında seçilir. Ancak metroloji dünyasında kapsam faktörü 2 alınarak genişletilmiş belirsizlik hesaplanır ve bu durumda, güvenilirlik düzeyi %95'tir. Kapsam faktörü 3 olarak alındığında genişletilmiş belirsizlik  $U$ 'nun güvenilirlik düzeyi %99'dur.

## 9. SONUÇLARIN RAPORLANMASI

Belirsizlik hesaplarının sonucunda elde edilen değer iyi bir şekilde raporlanmalıdır. Bunun için en basit yöntem aşağıdaki gibidir:

En düşük seviyeli güvenilirlik aralığı %95 için genişletilmiş belirsizlik hesaplandıktan sonra, ölçülmüş değer ve genişletilmiş belirsizlik  $y \pm U$  şeklinde verilerek, aşağıdaki şekilde bir ifade kullanılarak ifade edilmelidir.

*Raporda verilen belirsizlik bileşik standart belirsizlik kapsam faktörü  $k=2$  çarpılarak elde edilmiş olup, yaklaşık olarak %95 güvenilirlik seviyesindedir.*

Belirsizlikler  $\pm$  şeklinde her iki yöne doğru ya ölçülen değer biriminde, ya da ölçülen değer belli bir yüzdesi olarak veya belli bir değer olarak ifade edilirler.

Raporlanan belirsizlik değerindeki rakamların sayısı her zaman pratik ölçüm kapasitesini yansıtmalıdır. Ölçüm işlemleri gözönüne alınacak olursa çoğunlukla 2 anlamlı rakamdan daha fazla vermek doğru değildir. Belirsizlikler uygun rakama yuvarlanarak verilmelidir.

Belirsizlik hesaplarının sonucunda verilen rapor

- Ölçüm sonuçlarının ve bunların belirsizliklerini deney verilerinden ve girdi büyüklüklerinden hesaplama yöntemini açıklamalıdır;
- Tüm belirsizlik bileşenlerini ve bu bileşenlerin hesaplama yöntemini göstermelidir;
- Verilerin hesaplama yöntemleri öyle bir şekilde açıklanmalıdır ki, bu hesaplamalar tekrarlandığında açıklanan aynı belirsizlik değeri bulunabilsin;
- Hesaplamalarda kullanılan tüm düzeltme değerleri ve sabitler açıklanmalıdır.

Ölçüm sonucunda elde edilen değerle birlikte belirsizlik değeri olarak hem bileşik standart belirsizliğin, hem de genişletilmiş belirsizliğin değeri verilebilir. Ancak değerlerden hangisinin verildiği mutlaka açıklanmalıdır.

## 10. ÖLÇÜM BELİRSİZLİĞİNİN TAYİNİNDE İZLENECEK YOLLAR

Yapılan ölçümün belirsizliğini kestirmek için şimdiye kadar söylenenleri madde madde kısaca özetleyelim:

1. Eğer mümkün ise, girdi değerler ile çıktı değeri arasındaki matematiksel ilişkiyi belirleyin

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_N) \text{ gibi.}$$

2. Ölçüm koşullarında ölçülen değere etki eden bütün faktörleri belirleyin.
3. Düzeltmeler ve düzeltilmemiş sistematik hatalara bağlı belirsizlik bileşenlerinin listesini yapın.
4. Belirsizliğin sistematik bileşenleri için, daha önce yapılmış olası dağılımlardan ve belirsizlik çalışmalarından yararlanın.
5. Belirsizliğin her bir sistematik bileşenini ya dikdörtgen dağılım varsayarak standart belirsizlik

$$u(x_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$$

olarak, veya normal dağılım varsayarak

$$u(x_i) = \frac{\text{belirsizlik}}{k}$$

olarak hesaplayın.

6. Belirsizliğin rasgele bileşenlerinin sistematik bileşenlerinden daha önemli olup olmadığını anlamak için deneme ölçümler yapın.
7. Eğer rasgele bileşen anlamlı bir rakam ise, ortalamayı elde edebilmek için tekrarlanan ölçümler yapın.

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$$

8.  $s(q_k)$  elde etmek için ya deneysel standart sapmayı

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}$$

ve ortalamasının standart sapmasını

$$s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

hesaplayın ya da daha önce tekrarlanan ölçümlerden onun iyi bir tayinini yapın.

9. Belirsizliğin rasgele bileşeni önemli olmasa bile her zaman cihazın okuduğu değeri ölçümü yapan kişinin hatalarını en aza indirmek için kontrol edin.
10. 9.maddede tekrarlanan ölçümler için belirsizliği A-tipi ele alarak hesaplayın.
11. Birbirlerinden bağımsız girdi değerleri için bileşik belirsizliği eğer mutlak değerler kullanılmışsa

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i(y)}$$

eşitliğinden ( $c_i$  kısmi türev  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  'dir) veya eğer standart belirsizlikler göresel değerler ise

$$\frac{u_c(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i u(x_i)}{|x_i|} \right]^2}$$

$p_i$  fonksiyonel ilişkide pozitif veya negatif exponentlerdir.

12. Eğer veriler arasında ilişki olduğunu düşünüyorsanız, girdi değerleri ile ilişkili  $u(x_i)$  ve  $u(x_j)$  varyanslarını ve  $u(x_i, x_j)$  kovaryansını kullanarak

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

bileşik belirsizliği hesaplayıp kullanın.

13. Genişletilmiş belirsizliği

$$U = k u_c(y)$$

eşitliğinden  $k=2$  (%95 güvenilirlik düzeyiyle) kabul ederek veya deneydeki ölçüm sayısı az olduğundan normal dağılım kullanılmıyorsa, t-dağılımına göre kapsam faktörü  $k_p$  seçerek hesaplayın.

14. Genişletilmiş belirsizliği **Ölçüm Belirsizliğinin Raporlanması** başlıklı bölüm belirtildiği şekilde raporlayın.

## 11. UYGULAMA ÖRNEKLERİ

**Örnek 18.** 10 kΩ'luk direncin voltaj karşılaştırması yoluyla kalibrasyonu.

Geniş ölçüm bölgesine sahip bir voltmetre, seri bağlanmış dirençler sabit bir akım kaynağından beslenerek standart ile aynı nominal değere sahip bilinmeyen direnç ve standart direnç üzerindeki gerilimi ölçmek için kullanılır. Bilinmeyen direncin,  $R_x$  değeri aşağıdaki gibi verilir.

$$R_x = (R_s + R_D + R_T)V_x / V_s$$

Burada	$R_s$	- Standart direncin kalibrasyon sertifikasındaki değeri
	$R_D$	- Son kalibrasyondan beri $R_s$ 'teki kayma
	$R_T$	- Yağ banyosunun sıcaklığından dolayı $R_s$ 'teki göreceli değişim
	$V_x$	- Bilinmeyen direncin üzerindeki gerilim
	$V_s$	- Standart direncin üzerindeki gerilim

$V_x$  ve  $V_s$ 'yi ölçmek için aynı voltmetre kullanılır, ve bu ölçümlerdeki belirsizlikler arasında ilişki vardır. Böyle durumlarda voltmetre ile ölçülen kararsızlık yüzünden sadece bağıl farklılığı düşünmek gerekir.

A-Tipi değerlendirme:  $V_x / V_s$  (ppm) oranının 1'den sapmasını ölçmek için beş ölçüm yapıldığını ve okumaların aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım:

No:	Okumalar (ppm)
1	+10.4
2	+10.7
3	+10.6
4	+10.3
5	+10.5

Ölçümlerin ortalama değeri  $\bar{V} = +10.5$  ppm'dir.

Deneysel standart sapmanın değeri

$$s(V) = \sqrt{\frac{1}{4} ((-0.1)^2 + 0.2^2 + 0.1^2 + (-0.2)^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{0.10} = 0.158 \text{ ppm}$$

olarak buluruz. Daha sonra ortalamamızın standart sapmasının değeri buluruz.

$$u(V) = s(\bar{V}) = \frac{0.158}{\sqrt{5}} = 0.0706 \text{ ppm}$$

## Belirsizlik Bütçesi

$u(x_i)$	Belirsizlik Kaynağı	$u(x_i)$ 'nin değeri $\pm$ ppm	$c_i$	Olasılık dağılımı	$k$	$u_i(R_x)$ $\pm$ ppm
$u(R_S)$	Standart direncin kalibrasyonu	1.5	1	normal	2.0	0.75
$u(R_D)$	Standart direncin değerindeki kayma	2.0	1	dik dörtgen	1.73	1.155
$u(R_T)$	Yağ banyosunun sıcaklığı	0.5	1	dik dörtgen	1.73	0.289
$u(V_S)$	$R_S$ üzerindeki gerilim	0.2	1	dik dörtgen	1.73	0.115
$u(V_X)$	$R_X$ üzerindeki gerilim	0.2	1	dik dörtgen	1.73	0.115
$u(V)$	Tekrarlanabilirlik	0.071	1	normal	1.0	0.071
$u_c(R_X)$	Bileşik belirsizlik	-	-	normal	1.0	1.418
$U(R_X)$	Genişletilmiş belirsizlik	-	-	normal	2.0	2.836

Böylelikle rapor edilecek sonuç:

**10 k $\Omega$  direncin ölçülen değeri** **10 000.11  $\Omega$   $\pm$  0.03  $\Omega$**

*Rapor edilen belirsizlik, yaklaşık olarak %95 güvenilirlik düzeyini sağlayan kapsam faktörü  $k=2$  ile çarpılan standart belirsizliğe dayanır.*

Bu örnekten görüldüğü gibi belirsizliğin rasgele bileşeni gözlenebilir olduğunda bile, sistematik bileşen daha önemlidir.

**Örnek 19.** OIML Class M1'in 10 kg'lık nominal değerli ağırlığının kalibrasyonu.

Kalibrasyon daha önceden performans özellikleri belirlenen kütle komparatörü ve OIML Class F2 ağırlığı kullanılarak yapılır. Bilinmeyen ağırlık aşağıdaki ifadeyle elde edilir:

$$\text{Bilinmeyen ağırlık, } W_X = W_S + D_S + \delta C + Ab$$

burada:  $W_S$  - Standardın ağırlığı  
 $D_S$  - Son kalibrasyondan beri standardın değerindeki kayma  
 $\delta C$  - Komparatör okumalarındaki fark  
 $Ab$  - Havanın kaldırma kuvvetine göre düzeltme faktörü

- Standart kütlenin kalibrasyon sertifikasındaki %95 güvenilirlik düzeyinde verilen belirsizlik değeri  $\pm 30$  mg'dır.
- Standart kütlenin değerindeki kayması, daha önceki kalibrasyonlardan  $\pm 15$  mg'lık belirsizlikle tahmin edilmiştir.
- Komparatörün doğrusallığındaki belirsizliğinin daha önceki kalibrasyonlardan  $\pm 10$  mg olduğu tahmin edilmiştir.

- Komparatörün tekrarlanabilirliği için yapılan bir önceki A-Tipi değerlendirme (10 okuma sonucu) standart sapma  $s(W_R)$ 'nin 25 mg olduğu bulundu.
- Havanın kaldırma kuvvetine göre düzeltme faktöründeki belirsizlik, nominal değer = 10 mg'da 1 ppm olduğu tahmin edilmiştir.
- Bilinmeyen ağırlık ve standardın kütle değeri arasındaki fark komparatörle ölçülmüş, elde edilen ölçüm sonuçları aşağıdaki şekilde verilmiştir:

No:	pan 'daki ağırlık	komparatörün okuması
	standart	+0.01 g
1	bilinmeyen	+0.03 g
	standart	+0.02 g
2	bilinmeyen	+0.04 g
	standart	+0.01 g
3	bilinmeyen	+0.03 g
	standart	+0.01 g
	<i>ortalama fark</i>	+0.02 g

standartın ağırlığı 10 000.005 g olduğundan, kalibrasyonun sonucu **10 000.025 g** olarak verilecektir.

Bilinmeyen kütlenin değerini belirlemek için 3 okuma kullandığından ortalamanın standart sapmasının hesaplarında  $n=3$  kullanılmalıdır. Diğer bir deyişle,

$$u(W_R) = s(\overline{W_R}) = \frac{s(W_R)}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{3}} = 14.4 \text{ mg}$$

#### Belirsizlik Bütçesi

$u(x_i)$	Belirsizlik Kaynağı	$u(x_i)$ 'nin değeri ± mg	$c_i$	Olasılık dağılımı	$k$	$u_i(W_x)$ ± mg
$u(W_S)$	Standart kütlenin kalibrasyonu	30.0	1	normal	2.0	15.0
$u(D_S)$	Standart kütlenin değerindeki kayma	15.0	1	dik dörtgen	1.73	8.66
$u(\delta C)$	Komparatörün doğrusallığı	10.0	1	dik dörtgen	1.73	5.77
$u(Ab)$	Havanın kaldırma kuvvetine göre düzeltme faktörü	10.0	1	dik dörtgen	1.73	5.77
$u(W_R)$	Tekrarlanabilirlik	14.4	1	normal	1.0	14.4
$u_c(W_X)$	Bileşik belirsizlik	-	-	normal	1.0	23.98
$U(W_X)$	Genişletilmiş belirsizlik	-	-	normal	2.0	47.96

Böylelikle rapor edilecek sonuç:

10 kg'lık kütleinin ölçülen değeri  $10\,000.025\text{ g} \pm 0.05\text{ g}$

*Rapor edilen belirsizlik, yaklaşık olarak %95 güvenilirlik düzeyini sağlayan kapsam faktörü  $k=2$  ile çarpılan standart belirsizliğe dayanır.*

**Örnek 20.** Nominal değeri 10 mm olan gauge blokunun kalibrasyonu

Kalibrasyon, K-sınıfı ölçme bloğu referans alınarak, bir komparatör ile yapılır.

*Bilinmeyen gauge blokun uzunluğu,  $L_x = L_s + \delta L + D_c + \delta E + \delta C$*

burada:

- $L_s$  - Standart gauge blokun uzunluğu
- $\delta L$  - Uzunluktaki ölçülen fark
- $D_c$  - Komparatörün doğrusallığı ve ayrımsaması
- $\delta E$  - Uzama katsayılarındaki (coefficient of expansion) fark için düzeltmeler
- $\delta C$  - Esneklik katsayılarındaki (coefficient of compression) fark için düzeltmeler

- Komparatörün doğrusallığı ve ayrımsaması için düzeltme yapılmaz ( $D_c=0$ ). Belirsizlik katkısı önceki ölçümlerden hesaplandı.
- Standart gauge blok ve bilinmeyen gauge blok arasındaki sıcaklık farkı  $\pm 0.5^\circ\text{C}$  belirsizlikle sıfır olarak tahmin edildi, bu değer belirsizlik  $\delta E$ 'nin hesaplanmasında kullanıldı.

Aşağıdaki okumalar bilinmeyen gauge blok için elde edildi, komparatör her okumadan önce grade K gauge blok kullanılarak sıfırlandı.

No:	sonuç mm.	No:	sonuç mm.
1	9.99991	7	9.99992
2	9.99993	8	9.99994
3	9.99994	9	9.99990
4	9.99994	10	9.99992
5	9.99994	11	9.99990
6	9.99991		

Yukarıda verilen ölçüm sonuçlarının ortalama değeri  $\bar{L}_x = 9.999923\text{ mm}$  'dir.

Daha sonra deneysel standart sapma  $s(L_x)=0.0162\ \mu\text{m}$  olarak bulunur ve bu değeri kullanarak ortalamanın standart sapması hesaplanır

$$u(L_x) = s(\bar{L}_x) = \frac{0.0162}{\sqrt{11}} = 0.005\ \mu\text{m}$$

## Belirsizlik Bütçesi

$u(x_i)$	Belirsizlik Kaynağı	$u(x_i)$ 'nin değeri $\pm \mu m$	$c_i$	Olasılık dağılımı	$k$	$u_i(L_x)$ $\pm \mu m$
$u(L_g)$	Gauge blokun kalibrasyonu	0.035	1	normal	2.0	0.0175
$u(D_c)$	Komparatörün doğrusallığı ve ayırmsaması	0.057	1	dik dörtgen	1.73	0.033
$u(\delta E)$	Uzama katsayılarındaki fark	0.01	1	dik dörtgen	1.73	0.006
$u(\delta C)$	Esneklik katsayılarındaki fark	0.01	1	dik dörtgen	1.73	0.006
$u(L_x)$	Tekrarlanabilirlik	0.005	1	normal	1.0	0.005
$u_c(L_x)$	Bileşik belirsizlik	-	-	normal	1.0	0.0386
$U(L_x)$	Genişletilmiş belirsizlik	-	-	normal	2.0	0.077

Böylelikle rapor edilecek sonuç:

**Gauge blokun ölçülen değeri:  $9.999923 \text{ mm} \pm 0.077 \mu m$**

*Rapor edilen belirsizlik, yaklaşık olarak %95 güvenilirlik düzeyini sağlayan kapsam faktörü  $k=2$  ile çarpılan standart belirsizliğe dayanır.*

### Örnek 21. N-Tipi ısı çiftlerinin kalibrasyonu

- N-tipi ısı çifti  $1000^\circ\text{C}$ 'deki yatay ocaktaki iki referans standart R-tipi ısı çiftleriyle kalibre edilir. Ölçümler dijital voltmetre kullanılarak yapılır ve ısı çiftleri voltmetreye bir seçici / çevirici anahtarla bağlanır. Bütün ısı çiftleri  $0^\circ\text{C}$  referans noktasına bağlanır. Test ısı çiftleri (N-tipi) uygun kablolar (genellikle bakır) kullanılarak referans noktalara bağlanır.
- R-tipi ısı çiftleri, her biri çıkış emf'ini sıcaklığa bağlayan ve %95 güvenilirlik düzeyinde  $0.3^\circ\text{C}$  belirsizlikli kalibrasyon sertifikasına sahiptir.
- Rapor edilen sonuç verilen bir sıcaklık değeri için test ısı çiftlerinin çıkış emf 'i olacaktır. Böyle durumlarda, belirsizlik hesaplarının sıcaklık ( $^\circ\text{C}$ ) cinsinden yapılmasına ve genişletilmiş belirsizliğin çıkış emf'in belirsizliğine çevrilmesine karar verilir.
- Ölçümlerin sırası şöyledir: 1.Standart, Test Isıl çifti, 2.Standart, 2.Standart, Test Isıl çifti, 1.Standart. Daha sonra polarite çevrilir ve sıra tekrarlanır. Böylece dört okuma bütün ısı çiftleri için elde edilir. Sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Isıl Çift	1. Standart Isıl Çift	Test Isıl Çift	2. Standart Isıl Çift
Ölçülen Değer	+ 10500 $\mu V$ + 10503 $\mu V$ - 10503 $\mu V$ - 10504 $\mu V$	+ 36245 $\mu V$ + 36248 $\mu V$ - 36248 $\mu V$ - 36251 $\mu V$	+ 10503 $\mu V$ + 10503 $\mu V$ - 10505 $\mu V$ - 10505 $\mu V$
Mutlak Ortalama Değeri	10503 $\mu V$	36248 $\mu V$	10504 $\mu V$
Test Isıl Çift için Standart Sapma	-	2.5 $\mu V$	-
Test Isıl Çiftin Hassasiyeti	-	38.6 $\mu V/^\circ C$	-
Standart Isıl Çiftin Hassasiyeti	13.0 $\mu V/^\circ C$	-	13.0 $\mu V/^\circ C$
Fırın Sıcaklığı	1000.4 $^\circ C$	-	1000.6 $^\circ C$
Ortalama Fırın Sıcaklığı	1000.5 $^\circ C$		

Kalibre edilen ısı çifti için aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$u(T) = s(\bar{T}) = \frac{s(T)}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{4}} = 1.25 \mu V$$

Belirsizlik Bütçesi

$u(x_i)$	Belirsizlik Kaynağı	$u(x_i)$ 'nin değeri, $\pm$	$c_i$	Olasılık dağılımı	$k$	$u_i(T)$ $\pm$ $^\circ C$
$u(E_s)$	Standart Isıl çiftin kalibrasyonu	0.3 $^\circ C$	1.0	normal	2.0	0.150
$u(D_s)$	Standart ısı çiftlerinde kayma	0.1 $^\circ C$	1.0	dik dörtgen	1.73	0.058
$u(A_s)$	Standart ısı çiftleri arasında kabul edilebilir fark	0.3 $^\circ C$	1.0	dik dörtgen	1.73	0.173
$u(V_s)$	Voltmetrenin kalibrasyonu	1.0 $\mu V$	0.077	normal	2.0	0.040
$u(S_s)$	"Switch" kontakları	1.0 $\mu V$	0.077	dik dörtgen	1.73	0.045
$u(R_s)$	Referans noktanın belirlenmesi	0.01 $^\circ C$	1.0	dik dörtgen	1.73	0.006
$u(V_T)$	Voltmetrenin kalibrasyonu	1.0 $\mu V$	0.026	normal	2.0	0.013
$u(S_T)$	"Switch" kontakları	1.0 $\mu V$	0.026	dik dörtgen	1.73	0.015
$u(R_T)$	Referans noktanın belirlenmesi	0.01 $^\circ C$	1.0	dik dörtgen	1.73	0.006
$u(C_T)$	Compensation leads	2.0 $\mu V$	0.026	dik dörtgen	1.73	0.030
$u(F_T)$	Fırının homojen olmadığından doğan belirsizlik	0.5 $^\circ C$	1.0	dik dörtgen	1.73	0.289
$u(T)$	Tekrarlanabilirlik	1.25 $\mu V$	0.026	normal	1.0	0.032
$u_c(T)$	Bileşik belirsizlik	-	-	normal	1.0	0.381
$U(T)$	Genişletilmiş belirsizlik	-	-	normal	2.0	0.761

Sıcaklık biriminden toplam belirsizlik	$\pm 0.761^{\circ}\text{C}$ ,
Çıkış emf biriminden toplam belirsizlik	$\pm 0.761 \cdot 38.6 = \pm 29.4 \mu\text{V}$

Böylelikle rapor edilecek sonuç:

Ölçülen sıcaklık	Isıl Çiftin çıkışı
1000.5°C	36.248 $\mu\text{V} \pm 29.4 \mu\text{V}$

*Rapor edilen belirsizlik, yaklaşık olarak %95 güvenilirlik düzeyini sağlayan kapsam faktörü  $k=2$  ile çarpılan standart belirsizliğe dayanır.*

**Örnek 22.** Zaman ve frekans standardlarının kalibrasyonunda belirsizlik hesabı.

Zaman ve frekans standardlarının kalibrasyonlarında standardın doğruluğu ve kararlılığı ölçülür. Bu değerler kalibre edilecek olan standardın, doğruluğu ve kararlılığı daha iyi olan bir standartla karşılaştırılarak, uzun süre veri alınması ve bu veriler üzerinde istatistiksel hesaplamalar sonucunda belirlenir.

**Doğruluk:**

Bir zaman ve frekans standardının doğruluğu çıkış frekansının uluslararası kabul edilmiş olan frekansın tanımına göre farkıdır. Bu değer kalibre edilecek olan standardın frekans çıkışı ile, doğruluğu ondan çok daha iyi olan referans standardın frekans çıkışı arasındaki faz farkı zaman aralığı sayıcısı ile uzun süre ölçülerek bulunur. Ölçüm süresince ( $\Delta T$ ) oluşan faz değişiminin zaman cinsinden değerinin ( $\Delta t$ ) ölçüm süresine olan oranı o standardın doğruluğunu ( $\Delta t/\Delta T$ ) gösterir. Bu faz değişiminin zamana göre grafiğini çizdiğimizde, üzerinde belli bir seviyede gürültü olan küçük eğime sahip bir doğru olarak görülür. Bu gürültülü doğrunun lineer yaklaşımından farkına bakıldığında genliği  $\Delta t_1$  olan gürültü kalır. Bu  $\Delta t_1$  değeri doğruluğun belirlenmesindeki toplam belirsizliği gösterir.

$$\text{Doğruluk} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta t}{\Delta T} \pm \frac{\Delta t_1}{\Delta T}$$

Burada

- $\nu_1$  : Kalibre edilecek standardın çıkış frekansı
- $\nu_0$  : Referans standardın çıkış frekansı

Yukarıda gösterilen belirsizlik, zaman aralığı sayıcısı ve referans standardın belirsizliği, bu belirsizliği etkileyen çevre şartlarının (oda sıcaklığındaki değişim, nem oranı, titreşim, elektromanyetik etkiler) etkisi dahil, kablolar ve bağlantılardan gelebilecek olan bütün belirsizliklerin toplamıdır.

**Kararlılık:**

Kalibre edilecek standardın kararlılığı ise referans standart ile kalibre edilecek standart arasındaki faz farkı değişiminin **Allan Variance** hesaplanarak bulunur:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i - v_{i+1})^2}$$

$v_i$  : i.ölçüm süresi boyunca alınan ölçümlerin ortalama değeridir;  
 $N$  : toplam ölçüm sayısı.

Allan variance, standart sapmadan farklı olarak, alınan değerlerin ortalamaya göre sapmaları yerine, komşu ölçüm değerlerinin birbirlerinden farkı dikkate alınarak hesaplanır. Faz farkı ölçülürken kullanılan sistemden gelen toplam belirsizlik kararlılık hesabına dahildir.

## 12. KAYNAKLAR

1. R.B. Murphy, "Quality of Observations," Materials Research & Standards, 1961, p.357-264.
2. D.B. Schneider, "Error Analysis of Measurement Systems," NBS Miscellaneous Publication 248, Proc. 1962 Stand. Lab. Conf., p.93.
3. İSO, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Prep. by İSO Tech. Advis. Gr.4 (TAG 4), Work. Gr. 3 (WG 3), 1993.
4. B.N. Taylor and C.E Kuyatt, "Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NİST Measurement Results," NİST Tech. Note 1297, 1993.
5. "The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement", NİST 3003, Uncertainty and Confidence in Measurement, 8th ed., Jan. 1995.
6. "Metrolojide Kullanılan Temel ve Genel Terimler Sözlüğü," UME 94-003, Mayıs 1994.
7. R.P. Benedict, "Fundamentals of Temperature, Pressure, and Flow Measurements," John Wiley & Sons, İnc., 1984.
8. C.F. Dietrich, "Uncertainty, Calibration and Probability," Adam Hilger, 1991.
9. "Presentation of Data and Limits of Accuracy of an Observed Average," ASTM STP-15-C-1967.
10. R.P. Benedict, "Uncertainty in Measurement," Electro-Technol., Oct. 1964, p.51.
11. S.J. Kline and F.A. McClintock, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments", Mech. Eng., 75, Jan. 1953, p.3.
12. G.D. Johnson et al., "Evaluation of Measurement Uncertainties in Performance Testing of Hidraulic Turbines and Pump/Turbines," Trans. ASME, J. Eng. Power, Apr. 1975, p. 145.
13. A.J. Duncan, "Quality Control and İndustrial Statistics", 4th ed., İrwin, Homewood, İL, 1974.
14. K.A. Brownlee, "Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering", 2nd ed., Wiley, New York, 1967, p.300.
15. P.J. Campion, J.E. Burns, and A. Williams, "A Code of Practice for the Detailed Statement of Accuracy," NPL Rep., 1973, sec 2.
16. R.B. Abernethy et al., "Uncertainty in Gas Turbine Measurements," İSA İ-483-3, rev. 1980 ed.
17. "Kalibrasyonda Ölçme Belirsizliğin İfadesi İçin Klavuz," (WECC Doc. 19-1990 Sayılı Döküman Tercümesi), UME Y.15, Şubat 1993.

